۲۹

موج‌های الکترومغناطیسی

بخش ۲۹-۲ رنگین‌کمان ماکسول

•۱- یک لیزر هلیوم- نئون نور قرمز را در نوار باریکی از طول موج‌ها به مرکز ۶۳۲/۸nm و با «پهنای طول موج» ۰/۰۱۰۰nm (با مقیاس شکل ۲۹-۱) گسیل می‌کند. «پهنای بسامدی» مربوط به این گسیل چقدر است؟

حل: چون $\lambda >> \Delta\lambda$ است، برای Δf خواهیم داشت

$$\Delta f = \left|\Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right)\right| = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^{۲}} = \frac{(۳/۰\times ۱۰^{۸})(۰/۰۱۰۰\times ۱۰^{-۹})}{(۶/۳۲۸\times ۱۰^{-۹})^{۲}}$$

$$= ۷/۴۹\times ۱۰^{۹}\ \text{Hz}$$

•۲- طرح سی فارر[1] یک برنامهٔ بلند پروازنه برای نصب آنتن عظیمی در زیرزمین در پایگاهی به مساحت تقریبی ۱۰۰۰۰km^{۲} بود. هدف طرح این بود که سیگنال‌ها را به زیر دریایی‌هایی که در عمق زیاد بودند ارسال کنند. اگر طول موج مؤثر سیگنال‌ها ۱/۰×۱۰^{۴} برابر شعاع زمین باشد (الف) بسامد و (ب) زمان تناوب تابش‌های گسیل شده چقدر است؟ تابش‌های الکترومغناطیسی معمولی نمی‌توانند در رساناهایی نظیر آب دریا تا مسافت زیاد نفوذ کنند.

حل: (الف) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{۳/۰\times ۱۰^{۸}}{(۱/۰\times ۱۰^{۵})(۶/۴\times ۱۰^{۶})} = ۴/۶۹\times ۱۰^{-۳}\ \text{Hz}$

(ب) $T = \frac{۱}{f} = \frac{۱}{۴/۶۹\times ۱۰^{-۳}} = ۲۱۳\text{s} = \min ۳۳\text{s}$

•۳- در شکل ۲۹-۲ تقریباً (الف) کوچکترین و (ب) بزرگترین طول موجی که در آنها چشم یک ناظر معمولی دارای نصف حساسیت بیشینهٔ چشم است کدام‌اند؟ مطلوب است (پ) طول موج، (ت) بسامد و (ث) زمان تناوب نوری که در آن چشم بیشترین حساسیت را دارد.

حل: (الف) از شکل ۲۹-۲ در می‌یابیم که طول موج کوتاهتر در حدود ۵۱۵nm است.

(ب) و طول موج بلندتر تقریباً ۶۱۰ nm است.

(پ) از شکل ۲۹-۲ در می‌یابیم طول موجی که در آن چشم بیشترین حساسیت را دراد برابر ۵۵۵nm است.

(ت) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{۳/۰۰\times ۱۰^{۸}}{۵۵۵\times ۱۰^{-۹}} = ۵/۴۱\times ۱۰^{۱۴}\ \text{Hz}$

(ث) $T = ۱/f = (۵/۴۱\times ۱۰^{۱۱})^{-۱} = ۱/۸۵\times ۱۰^{-۱۵}\ \text{s}$

---

1. Seafarer

●۴- تقریباً دستهایتان را در چه فاصله‌ای از هم باید نگه دارید تا جدایی آنها ۱/۰ نانو ثانیهٔ نوری باشد (مسافتی که نور در ۱/۰ns طی می‌کند)؟

حل: $d = ct = (۳/۰\times۱۰^{۸})(۱/۰\times۱۰^{-۹}) = ۰/۳۰\,m$

بخش ۲۹-۳ موج‌های الکترومغناطیسی پیشرونده، بررسی کیفی

●۵- SSM چه القاگری باید به خازن ۱۷pF یک نوسانگر وصل شود تا بتواند موج‌های الکترومغناطیسی ۵۵۰ nm (یعنی مرئی) ایجاد کند؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

حل: $T = \frac{\lambda}{C} = \frac{(۵۵۰\times۱۰^{-۹})}{(۳\times۱۰^{۸})} = ۱/۸۳\times۱۰^{-۱۵}\,s$

$$T^{۲} = ۴\pi^{۲}LC \Rightarrow L\frac{T^{۲}}{۴\pi^{۲}C}$$

$$L = \frac{(۱/۸۳\times۱۰^{-۱۵})^{۲}}{(۴)(۳/۱۴)^{۲}(۱۷\times۱۰^{-۱۲})} = ۵\times۱۰^{-۲۱}\,H$$

●۶- با دستگاه نوسانگر - آنتن شکل ۲۹-۳ اگر $L = ۰/۲۵۳\mu H$ و $C = ۲۵/۰\,pF$ باشد، چه طول موجی از موج الکترومغناطیسی گسیل می‌شود؟

حل: $T = ۲\pi\sqrt{LC} = (۲)(۳/۴)\sqrt{(۰/۲۵۳\times۱۰^{-۶})(۲۵\times۱۰^{-۱۲})}$

$$\simeq ۱/۵۸\times۱۰^{-۸}\,s$$

$$\lambda = CT = (۳\times۱۰^{۸})(۱/۵۸\times۱۰^{-۸}) = ۴/۷۴m$$

بخش ۲۹-۵ انتقال انرژی و بردار پویین‌تینگ

●۷- شدت یک موج الکترومغناطیسی تخت پیشرونده اگر B_m برابر $۱/۰\times۱۰^{-۴}\,T$ باشد، چقدر است؟

حل: شدت برابر با میانگین بردار پوئین تینگ است:

$$I = S_{avg} = \frac{cB_m^{۲}}{۲\mu_۰} = \frac{۳/۰\times۱۰^{۸})(۱/۰\times۱۰^{-۴})^{۲}}{۲(۴\pi\times۱۰^{-۷})}$$

$$= ۱/۲\times۱۰^{۶}\,W/m^{۲}$$

●۸- فرض کنید (به طور غیر واقعی) که یک ایستگاه TV همانند یک چشمهٔ نقطه‌ای عمل کند و به طور همسانگرد و در ۱/۰MW برنامه پخش کند. شدت تابش گسیل شده به نزدیکترین ستاره به منظومهٔ شمسی یعنی ستارهٔ پروکسیمای قنطورس که در فاصلهٔ ۴/۳ ly قرار دارد، چقدر است؟ (یک موجود هوشمند ممکن است در آن فاصله قادر به تماشای برنامهٔ پروندهٔ X باشد.) سال نوری (ly) مسافتی است که نور در یک سال طی می‌کند.

حل: شدت سیگنال در *پروکسیمای قنطورس* چنین می‌شود:

$$I = \frac{P}{۴\pi r^{۲}} = \frac{۱/۰\times۱۰^{۶}}{۴\pi\left[(۴/۳)(۹/۴۶\times۱۰^{۱۵})\right]^{۲}} = ۴/۸\times۱۰^{-۲۹}\,W/m^{۲}$$

●۹- H.W برخی لیزرهای نئودیمیم- شیشه می‌توانند تپ‌هایی در ۱/۰ns در طول موج ۰/۲۶µm و با توان ۱۰۰TW تولید کنند. چه مقدار انرژی در یک تپ تنها وجود دارد.

حل: اگر P توان و Δt بازهٔ زمانی یک پالس (تپ) باشد، آنگاه انرژی یک پالس چنین می‌شود:

$$E = P\Delta t = (۱۰۰\times۱۰^{۱۲})(۱/۰\times۱۰^{-۹}) = ۱/۰\times۱۰^{۵}\,J$$

●۱۰- یک موج الکترومغناطیسی تخت دارای میدان الکتریکی بیشینهٔ $۳/۲۰\times۱۰^{-۴}\,V/m$ است. دامنهٔ میدان مغناطیسی را به دست آورید.

حل: دامنهٔ میدان مغناطیسی موج برابر است با

$$B_m \frac{E_m}{c} = \frac{۳/۲۰\times۱۰^{-۴}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۱/۰۷\times۱۰^{-۱۲}\,T$$

●۱۱- یک موج الکترومغناطیسی تخت که در جهت مثبت محور x در خلأ حرکت می‌کند دارای مؤلفه‌های $E_x = E_y = ۰$ و $E_z = (۲/۰)\cos[(\pi\times۱۰^{۱۵}s^{-۱})(t - x/c)]$ است. (الف) دامنه و بزرگی مؤلفهٔ میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ب) میدان مغناطیسی موازی با کدام محور نوسان می‌کند؟ (پ) وقتی مؤلفهٔ میدان الکتریکی در نقطهٔ مشخص P در جهت مثبت محور z باشد، مؤلفهٔ میدان مغناطیسی در آنجا در کدام جهت است؟

حل: (الف) $E_m = ۲\,V/m$

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{۲}{۳\times۱۰^{۸}} = ۶/۶۷\times۱۰^{-۹}\,T$$

(ب) و (پ) در رابطهٔ $\vec{S} = \frac{۱}{\mu_۰}\vec{E}\times\vec{B}$ اگر $\vec{E}$ جهت میدان الکتریکی و $\vec{B}$ جهت میدان مغناطیسی باشد، جهت $\vec{B}$ در جهت محور y می‌باشد. ($\vec{S}$ در جهت $\hat{i}$ و $\vec{E}$ در جهت $\hat{k}$ می‌باشد). راستای ارتعاش B، محور y و در نقطهٔ P در خلاف محور y است.

●۱۲- در یک موج رادیویی تخت بیشینهٔ مقدار مؤلفهٔ میدان الکتریکی برابر ۵/۰۰V/m است. مطلوب است محاسبهٔ (الف) مقدار بیشینهٔ مؤلفهٔ میدان مغناطیسی و (ب) شدت موج.

حل: (الف)

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{(۵/۰۰)}{۳\times۱۰^{۸}} = ۱/۶۷\times۱۰^{-۸}\,T$$

(ب)

$$I = S_{avg} = \frac{E_m^{۲}}{۲\mu_۰ c} = \frac{(۵/۰۰)}{۲(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۳\times۱۰^{۸})}$$

$$= ۳/۳۱\times۱۰^{-۲}\,W/m^{۲}$$

●●۱۳- نور خورشید درست در خارج از جو زمین دارای شدت $۱/۴۰\,kW/m^{۲}$ است. مطلوب است (الف) E_m و (ب) B_m برای نور خورشید در آنجا، با فرض تخت بودن موج.

حل: (الف) از معادلهٔ ۲۹-۲۶ می‌توان نوشت

$$E_m = \sqrt{۲\mu_۰ I_c}$$

$$= \sqrt{۲(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۱/۴۰\times۱۰^{۳})(۲/۹۹۸\times۱۰^{۸})}$$

$$= ۱/۰۳\times۱۰^{۳}\,V/m$$

(ب) $B_m \frac{E_m}{c} = \frac{۱/۰۳\times۱۰^{۳}}{۳\times۱۰^{۸}} = ۳/۴۳\times۱۰^{-۶}\,T$

●●۱۴- GO یک چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد، نوری را با طول موج ۵۰۰nm و با آهنگ ۲۰۰W گسیل می‌کند. آشکارساز نوری ۴۰۰m از چشمه فاصله دارد. بیشینهٔ آهنگ $\partial B/\partial t$ که مؤلفهٔ مغناطیسی نور در محل آشکارساز با زمان تغییر می‌کند، چقدر است؟

حل: ابتدا دامنهٔ میدان مغناطیسی را در محل آشکارساز بدست می‌آوریم.

$$\lambda = \frac{c}{f}\frac{۲\pi c}{۲\pi f} = \frac{۲\pi c}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi c}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{(۲)(۳/۱۴)(۳\times۱۰^{۸})}{(۵۰۰\times۱۰^{-۹})} = ۳/۷۷\times۱۰^{۱۵}\,rad/s$$

$$I = \frac{P}{۴\pi r^{۲}} = \frac{(۲۰۰)}{(۴)(۳/۱۴)(۴۰۰)^{۲}} = ۹/۹۵\times۱۰^{-۵}\,W/m^{۲}$$

$$I = \frac{cB^{۲}m}{۲\mu_۰} \Rightarrow B_m = \sqrt{\frac{۲I\mu_۰}{c}}$$

$$B_m = \sqrt{\frac{(۲)(۹/۹۵\times۱۰^{-۵})(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۳\times۱۰^{۸})}}$$

$$= ۹/۱۳\times۱۰^{-۱۰}\,T$$

$$B = B_m\sin(\omega t + \phi_۰)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = B_m\omega\cos(\omega t + \phi_۰)$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_m = (۹/۱۳\times۱۰^{-۱۰})(۳/۷۷\times۱۰^{۱۵}) = ۳/۴۴\times۱۰^{۶}\,T/s$$

●●۱۵- هواپیمایی که در فاصلهٔ ۱۰km پرواز می‌کند از یک فرستندهٔ رادیویی سیگنالی را با توان $۱۰\mu W/m^{۲}$ دریافت می‌کند. دامنهٔ مؤلفهٔ (الف) الکتریکی (ب) مغناطیسی در هواپیما چقدر است؟ (پ) اگر فرستنده در همهٔ جهت‌ها به طور یکنواخت تابش کند، کل توان آن چقدر است؟

حل: (الف) $I = \frac{E_m^{۲}}{۲\mu_۰ c} \Rightarrow E_m = \sqrt{۲\mu_۰ cI}$

$$E_m = \sqrt{(۲)(۴\pi\times۱۰^{-۷})(۳\times۱۰^{۸})(۱۰\times۱۰^{-۶})}$$

$$\simeq ۸/۷\times۱۰^{-۲}\,V/m$$

(ب)

$$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{(۸/۷\times۱۰^{-۲})}{(۳\times۱۰^{۸})} = ۲/۹\times۱۰^{-۱۰}\,T$$

(پ)

$$P = IA = (۱۰\times۱۰^{-۶})(\frac{۱}{۲})(۴\pi)(۱۰\times۱۰^{۳})^{۲} = ۶/۳\times۱۰^{۳}\,W$$

●●۱۶- GO فرانک دی دریک[1] یک پژوهشگر فعال برنامهٔ SETI[2] (جستجو برای اطلاعات فرازمینی) گفته است که رادیو تلسکوپ بزرگ در آرچیبو، پورتوریکو (شکل ۲۹-۳۸) «می‌تواند سیگنالی را که به تمام سطح زمین می‌رسد و توان آن فقط یک پیکو وات است آشکار کند». (الف) توان واقعی که به وسیلهٔ آنتن آرچیبو برای چنین سیگنالی دریافت می‌شود چقدر است؟ قطر آنتن ۳۰۰m است. (ب) توان چشمه‌ای که در مرکز کهکشان می‌تواند چنین سیگنالی را ایجاد کند چقدر است؟ مرکز کهکشان در فاصلهٔ $۲/۲\times۱۰^{۴}\,ly$ قرار دارد. سال نوری مسافتی است که نور در یک سال طی می‌کند.

شکل ۲۹-۳۶ مسئلهٔ ۱۶، رادیو تلسکوپ آرچیبو.

حل: (الف) اگر r شعاع آنتن، R_e شعاع زمین، P_s توان کل سیگنال و P'_s توان دریافتی توسط آنتن باشد برای P_s و P'_s به ترتیب خواهیم داشت:

$$P_s = I/\pi r^{۲} \quad , \quad P'_s = I/۴\pi R_e^{۲}$$

با حذف I در این دو معادله به رابطهٔ زیر خواهیم رسید:

$$P'_s = \frac{۱}{۴}P_s\left(\frac{r}{R_e}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴}(۱/۰\times۱۰^{-۱۲}\,W)\left(\frac{۱۵۰\,m}{۶/۳۷\times۱۰^{۶}\,m}\right)^{۲}$$

$$= ۱/۳۹\times۱۰^{-۲۲}\,W$$

(ب) حال اگر P_{os} را توان چشمه در مرکز کهکشان و $r_۰$ را فاصلهٔ مرکز کهکشان تا زمین بگیریم، خواهیم داشت:

$$P_{os}\pi r^{۲} = ۴\pi P'_s r_۰^{۲}$$

و از آنجا P_{os} چنین می‌شود

$$P_{os} = ۴P'_s\left(\frac{r_۰}{r}\right)^{۲}$$

$$= ۴(۱/۳۹\times۱۰^{-۲۲})\left[\frac{(۲/۲\times۱۰^{۴})(۹/۴۶\times۱۰^{۱۵})}{۱۵۰}\right]^{۲}$$

$$= ۱/۰۷\times۱۰^{۱۵}\,W$$

1. Frank D.Drake
2. Search for Extra-Terrestrial Intelligence

تعبیر دیگر معادلهٔ بالا این است که می توان نوشت، $P_{os}=4\pi r_\circ^2 I$ که در آن $I=P_s'/4\pi R_e^2$ است.

●●۱۷- بیشینهٔ میدان الکتریکی در فاصلهٔ ۱۰m از یک چشمهٔ نور نقطه‌ای ۲/۰V/m است. (الف) بیشینهٔ مقدار میدان مغناطیسی و (ب) شدت میانگین در آنجا چقدر است؟ (پ) توان چشمه چقدر است؟

حل: (الف)

$$B_m=\frac{E_m}{c}=\frac{(2/0)}{3\times10^8}=6/7\times10^{-9}\ \mathrm{T}$$

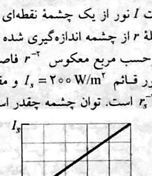
(ب) از معادلهٔ ۲۹-۲۶ داریم

$$I=S_{avg}=\frac{E_m^2}{2\mu_\circ c}=\frac{(2/0)}{2(4\pi\times10^{-7})(3\times10^8)}$$
$$=5/3\times10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$$

(پ)

$$P=4\pi r^2 I_{avg}=4\pi(10)^2(5/3\times10^{-3})=6/67\mathrm{W}$$

●●۱۸- شدت I نور از یک چشمهٔ نقطه‌ای همسانگرد برحسب تابعی از فاصلهٔ r از چشمه اندازه‌گیری شده است. شکل ۲۹-۴۰ شدت I را برحسب مربع معکوس r^{-2} فاصله به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم $I_s=200\ \mathrm{W/m^2}$ و مقیاس محور افقی $r_s^{-2}=8/0\ \mathrm{m^{-2}}$ است. توان چشمه چقدر است؟



شکل ۲۹-۳۷ مسئلهٔ ۱۸

حل:

$$I=\frac{P}{4\pi r^2}$$

پس شیب I برحسب $\frac{1}{r^2}$ برابر $\frac{P}{4\pi}$ می‌باشد.

$$\frac{P}{4\pi}=\frac{200}{10}=20$$

$$P=251\ \mathrm{W}$$

بخش ۲۹-۶ فشار تابشی

●۱۹- SSM از فشار تابشی لیزرهای با توان بالا برای متراکم کردن پلاسما (گازی از ذره‌های باردار) استفاده می‌شود. لیزری که تپ‌های تابشی با توان بیشینهٔ $1/5\times10^3$ MW تولید می‌کند روی $1/0\mathrm{mm^2}$ از پلاسما با چگالی زیاد الکترون متمرکز شده است. اگر پلاسما تمام باریکهٔ نور را مستقیماً به عقب در امتداد مسیرشان بازتاب دهد، فشار وارد شده بر پلاسما را به دست آورید.

حل: پلاسما کاملاً تمام انرژی تابیده به آن را باز می‌تاباند و بنابراین فشار تابشی با $p_r=2I/c$ داده می‌شود که I شدت است. شدت برابر $I=P/A$ است که P توان و A مساحت مقطعی است که تابش بر آن فرود می‌آید. بنابراین داریم

$$p_r=\frac{2p}{Ac}=\frac{2(1/5\times10^9)}{(1/00\times10^{-6})(2/998\times10^8)}$$
$$=1/0\times10^7\ \mathrm{Pa}$$

●۲۰- تابش خورشید که به زمین می‌رسد (درست خارج از جو) دارای شدت $1/4\ \mathrm{kW/m^2}$ است. (الف) با فرض اینکه زمین (و جو آن) شبیه یک قرص مسطح رفتار می‌کند که بر پرتوهای خورشید عمود است و همهٔ انرژی تابشی را جذب می‌کند، نیرویی که بر اثر فشار تابشی به زمین وارد می‌شود چقدر است؟ (ب) برای مقایسه، نیروی وارد شده به خاطر جاذبهٔ گرانشی خورشید را محاسبه کنید.

حل: (الف) فشار تابشی، نیروی زیر را ایجاد می‌کند

$$F_r=p_r(\pi R_e^2)=\left(\frac{I}{c}\right)(\pi R_e^2)$$
$$=\frac{\pi(1/4\times10)(6/37\times10^6)^2}{2/998\times10^8}=6/0\times10^8\ \mathrm{N}$$

(ب) کشش گرانشی خورشید بر روی زمین برابر است با:

$$F_g=G\frac{M_sM_e}{r_{es}^2}$$
$$=(6/67\times10^{-11})\frac{(1/99\times10^{30})(5/98\times10^{24})}{(1/5\times10^{11})}$$
$$=3/54\times10^{22}\ \mathrm{N}$$

●۲۱- ILW فشار تابشی در فاصلهٔ ۱/۵m از یک لامپ ۵۰۰W چقدر است؟ فرض کنید سطحی که به آن فشار وارد می‌شود در مقابل لامپ و جذب کنندهٔ کامل است و لامپ در همهٔ جهت‌ها به طور یکنواخت تابش می‌کند.

حل: چون سطح، جذب‌کنندهٔ کامل است، فشار تابشی با $p_r=I/c$ داده می‌شود که در آن I شدت است. همچنین چون لامپ به طور یکنواختی در تمام جهت‌ها تابش می‌کند، شدت درفاصلهٔ r از آن با $I=p/4\pi r^2$ داده می‌شود که P توان لامپ است. بنابراین P_r چنین می‌شود

$$p_r=\frac{P}{4\pi r^2 c}=\frac{500}{4\pi(1/5)^2(3\times10^8)}$$
$$=5/9\times10^{-8}\ \mathrm{Pa}$$

●۲۲- قطعه مقوای سیاه کاملاً جذب کننده‌ای با مساحت $A=2/0\mathrm{cm^2}$ نوری به شدت $10\ \mathrm{W/m^2}$ را از فلاش دوربین عکاسی دریافت می‌کند. فشار تابشی نور روی مقوا چقدر است؟

حل: فشار تابشی در جذب کامل برابر است با

$$p_r=\frac{I}{c}=\frac{10\ \mathrm{W/m^2}}{3\times10^8\ \mathrm{m/s}}=3/33\times10^{-8}\ \mathrm{Pa}$$

●●۲۳- شخصی می‌خواهد یک کرهٔ ۰/۵۰۰m کوچک و کاملاً جذب کننده را بالای یک چشمهٔ نقطه‌ای و همسانگرد نور غوطه‌ور کند به طوری که نیروی تابشی به سمت بالای نور با نیروی گرانشی رو به پایین یکسان باشد. چگالی کره $19/0\mathrm{g/cm^3}$ و شعاع آن ۲/۰۰mm است. (الف) توان مورد نیاز چشمهٔ نور چقدر باید باشد؟ (ب) حتی اگر چنین چشمه‌ای ساخته شود، چرا نگهداری کره ناپایدار است؟

حل: (الف) شدت نور درمحل کره برابر است با:

$$I=\frac{P}{A}=\frac{P}{4\pi r^2}$$

P_r فشار برابر است با:

$$P_r=\frac{I}{c}=\frac{P}{4\pi r^2 c}$$

$$F_r=P_rA'=\frac{P\pi R^2}{4\pi r^2}=mg\Rightarrow P=\frac{4r^2cmg}{R^2}$$

$$m=\rho V=\rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$m=(19\times10^3)(\frac{4}{3})(3/14)(2\times10^{-3})^3=6/36\times10^{-4}\ \mathrm{kg}$$

R شعاع کره و r فاصلهٔ کره از منبع تابش است

$$P=\frac{(4)(0/5)^2(3\times10^8)(6/36\times10^{-4})(9/8)}{(2\times10^{-3})^2}=4/67\times10^{11}\ \mathrm{W}$$

(ب) اگر کره در جهت افقی جابه‌جا شود، دیگر راستای وزن نیروی تابش یکسان نیستند و نمی‌توانند یکدیگر را خنثی کنند.

●●۲۴- GO پیشنهاد شده است که با به کار بردن بادبان بزرگی که از ورقهٔ فلزی ساخته شده است سفینهٔ فضایی می‌تواند بر اثر فشار تابشی در منظومهٔ شمسی حرکت کند. بزرگی این بادبان چقدر باید باشد تا بزرگی نیروی تابشی مساوی جاذبهٔ گرانشی خورشید شود؟ فرض کنید که جرم سفینه و بادبان روی هم ۱۵۰۰ kg و بادبان بازتاب کنندهٔ کامل است و عمود بر پرتوهای خورشید قرار دارد. برای اطلاعات مورد نیاز به پیوست پ نگاه کنید. (با بادبان بزرگتر سفینه پیوسته از خورشید دور می‌شود.)

حل:

$$F_g=F_r$$

اگر P_s توان تابشی خورشید باشد، با استفاده از پیوست ج داریم:

خورشید $P_s=3/90\times10^{26}$

$$P_s=I4\pi r^2\Rightarrow I=\frac{P_s}{4\pi r^2}$$

از طرف دیگر داریم:

$$F_r=P_rA=\frac{2I}{c}A=\frac{2P_sA}{c4\pi r^2}=\frac{P_sA}{2\pi cr^2}$$

که A مساحت بادبان است.

$$G\frac{mm_s}{r^2}=\frac{P_sA}{2\pi cr^2}$$

با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$$A=9/62\times10^5\ \mathrm{m^2}$$

●●۲۵- SSM ثابت کنید، برای یک موج الکترومغناطیسی تخت که به طور عمود بر سطحی تخت فرود می‌آید، فشار تابشی روی سطح برابر است با چگالی انرژی باریکهٔ فرودی. (این رابطه بین فشار و چگالی انرژی بدون توجه به اینکه چه کسری از انرژی فرودی بازتابیده شده، برقرار است.)

حل: فرض می‌کنیم موج تابشی با ضریب a جذب می‌گردد. در این صورت $(1-a)$ ضریب باز تابش است. در این صورت فشار تابشی برابر است با:

$$P_r=\frac{2(1-a)I_\circ}{c}+\frac{aI_\circ}{c}=\frac{2I_\circ}{c}-\frac{I_\circ a}{c}=\frac{I_\circ}{c}(2-a)\qquad(1)$$

شدت، میزان انرژی در واحد سطح در واحد زمان است. در نزدیکی سطح دو شدت داریم، یکی شدت اولیه $I_\circ$ و دیگری شدت باز تابش، لذا داریم:

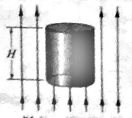
$$I=I_\circ+(1-a)I_\circ=\frac{U}{A\cdot t}=\frac{u\cdot V}{A\cdot t}=\frac{uA\cdot l}{A\cdot t}$$

$$I=(2-a)I_\circ=u\frac{l}{t}=uc\Rightarrow I_\circ=\frac{uc}{2-a}$$

این نتیجه را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم:

$$p_r=\frac{uc(2-a)}{c(2-a)}=u$$

●●۲۶- در شکل ۲۹-۳۸ یک باریکهٔ لیزری با توان ۴/۶۰ W و قطر D = ۲/۶۰mm در جهت رو به بالا به وجه دایره‌ای (با قطر d < ۲/۶۰mm) استوانهٔ کاملاً بازتاب کننده‌ای فرود می‌آید. استوانه به خاطر اینکه نیروی تابشی به سمت بالا با نیروی گرانش رو به پایین یکسان است معلق می‌ماند. اگر چگالی استوانه $1/20\ \mathrm{g/cm^3}$ باشد، ارتفاع H استوانه چقدر است؟



شکل ۲۹-۳۸ مسئلهٔ ۲۶

حل: نیروی ناشی از تابش با نیروی وزن استوانه برابر است.

$$I=\frac{P}{A}=\frac{P}{\pi r^۲}$$

$$F_r=P_rA=\frac{۲IA}{c}=\frac{۲P}{c}$$

$$F_r=\frac{۲(۴/۶۰)}{(۳\times۱۰^۸)}=۳/۰۷\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{N}$$

$$F_r=mg\Rightarrow F_r=\rho AHg\Rightarrow H=\frac{F_r}{\rho Ag}$$

$$H=\frac{(۳/۰۷\times۱۰^{-۸})}{(۱/۲۰\times۱۰^۳)(۳/۱۴)(۱/۳\times۱۰^{-۳})^۲(۹/۸)}$$

$$=۴/۹۲\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{m}$$

۲۷●●- SSM WWW یک موج الکترومغناطیسی تخت با طول موج $۳/۰\mathrm{m}$ در خلأ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. میدان الکتریکی با دامنهٔ $۳۰۰\mathrm{V/m}$ موازی با محور y نوسان می‌کند. (الف) بسامد، (ب) بسامد زاویه‌ای و (پ) عدد زاویه‌ای موج چقدر است؟ (ت) دامنهٔ مؤلفهٔ میدان مغناطیسی چقدر است؟ (ث) میدان مغناطیسی موازی با کدام محور نوسان می‌کند؟ (ج) آهنگ میانگین زمانی شار انرژی مربوط به موج بر حسب وات بر متر مربع چقدر است؟ موج به طور یکنواخت به سطحی به مساحت $۲/۰\mathrm{m}^۲$ می‌تابد. اگر سطح، موج را کاملاً جذب کند (چ) آهنگ انتقال اندازه حرکت به سطح و (ح) فشار تابشی روی سطح چقدرند؟

حل: (الف) $f=\frac{c}{\lambda}=\frac{۲/۹۹۸\times۱۰^۸}{۳/۰}=۱/۰\times۱۰^۸\ \mathrm{Hz}$

(ب) $\omega=۲\pi f=۲\pi(۱/۰\times۱۰^۸)=۶/۳\times۱۰^۸\ \mathrm{rad/s}$

(پ) $k=\frac{۲\pi}{\lambda}=\frac{۲\pi}{۳/۰m}=۲/۱\mathrm{rad/m}$

(ت) $B_m=\frac{E_m}{c}=\frac{۳۰۰}{۳\times۱۰^۸}=۱/۰\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{T}$

(ث) برای آنکه جهت انتشار موج در سوی x+ باشد باید جهت $\vec{E}\times\vec{B}$ در سوی مثبت محور x ها باشد. بنابراین چون $\vec{E}$ در سوی مثبت y است، $\vec{B}$ باید در سوی مثبت محور z باشد.

(ج) شدت موج برابر است با

$$I=\frac{E_m^۲}{۲\mu_۰c}=\frac{(۳/۰۰)^۲}{۲(۴\pi\times۰^{-۷})(۳\times۱۰^۸)}$$

$$=۱۱۹/۳۶\mathrm{W/m}^۲$$

(چ) چون سطح، جذب کنندهٔ کامل است، آهنگی که در یکای مساحت به سطح انداهٔ حرکت می‌دهد برابر I/c است و بنابراین داریم

$$\frac{dp}{dt}=\frac{IA}{c}=\frac{(۱۱۹/۳۶)}{۳\times۱۰^۸}=۷/۹۷\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{Pa}$$

(ح) فشار تابشی چنین می‌شود

$$P_r=\frac{I}{c}=\frac{dp/dt}{A}=\frac{۷/۹۷\times۱۰^۷}{۲/۰}=۳/۹۸\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{Pa}$$

۲۸●●- شدت میانگین تابش خورشیدی که به طور عمود درست روی سطح خارجی جو زمین فرود می‌آید $۱/۴\mathrm{W/m}^۲$ است. (الف) فشار تابشی p_r وارد بر سطح، با درنظر گرفتن جذب کامل چقدر است؟ (ب) برای مقایسه نسبت p_r را به فشار جو در زمین و در سطح دریا که $۱\times۱۰^۵\ \mathrm{Pa}$ است به دست آورید.

حل:

(الف) با فرض آنکه جذب کامل باشد برای فشار تابشی داریم

$$P_r=\frac{I}{c}=\frac{۱/۴\times۱۰^۳\ W/m^۲}{۳\times۱۰^۸}=۴/۶۷\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{N/m}^۲$$

(ب) مقادیر را با تشکیل نسبت زیر مقایسه می‌کنیم

$$\frac{P_r}{P_۰}=\frac{۴/۶۷\times۱۰^{-۶}}{۳\times۱۰^۸}=۴/۶۷\times۱۰^{-۱۱}$$

۲۹●●- SSM سفینهٔ فضایی کوچکی که جرم آن $۱/۵\times۱۰^۳\ \mathrm{kg}$ (شامل یک فضانورد) است به فضای خارج حرکت می‌کند و نیروی گرانشی وارد بر آن قابل چشم‌پوشی است. اگر فضانورد یک باریکهٔ لیزری $۱۰\mathrm{kW}$ را روشن کند، بر اثر اندازه حرکت وارد شده توسط باریکه، سفینه در $۱/۰$ روز چه سرعتی پیدا می‌کند؟

حل:

توان $P=\frac{E}{t}=\frac{\Delta Pc}{t}=c\frac{\Delta P}{t}$

ΔP تکانهٔ اشعه تابیده شده و در نتیجه تغییر تکانهٔ سفینه است.

$$F=\frac{\Delta P}{t}=\frac{P}{c}=\frac{(۱۰\times۱۰^۳)}{(۳\times۱۰^۸)}=۳/۳\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{N}$$

$$F=ma\Rightarrow a=\frac{F}{m}=\frac{(۳/۳\times۱۰^{-۵})}{(۱/۵\times۱۰^۳)}=۲/۲\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{m/s}^۲$$

$$V=at=(۲/۲\times۱۰^{-۸})(۲۴\times۳۶۰۰)=۱/۹\times۱۰^{-۸}\ \mathrm{m/s}$$

۳۰●●●- لیزر کوچکی نور را با توان $۵/۰۰\mathrm{mW}$ و طول موج $۶۳۳\mathrm{nm}$ گسیل می‌کند. باریکهٔ لیزر متمرکز می‌شود (باریک می‌شود) تا قطر آن با قطر $۱۲۶۶\mathrm{nm}$ کره‌ای که در مسیر قرار دارد برابر شود. کره کاملاً جذب کننده و دارای چگالی $۵/۰۰\times۱۰^۳\ \mathrm{kg/m}^۳$ است. (الف) شدت باریکه در محل کره، (ب) فشار تابشی روی کره، (پ) بزرگی نیروی مربوطه، و (ت) بزرگی شتابی که این نیرو به تنهایی به کره خواهد داد چقدر است؟

حل: (الف) چون باریکه روی کره متمرکز شده است، سطح مقطع باریکه برابر $\pi d^۲/۴$ می شود که d قطر باریکه $(=۲/۰۰\lambda)$ است.بنابراین برای شدت باریکه داریم

$$I=\frac{P}{\pi d^۲/۴}=\frac{۵/۰۰\times۱۰^{-۳}}{\pi\left[(۲/۰۰)(۶۳۳\times۱۰^{-۹})\right]^۲/۴}$$

(ب)

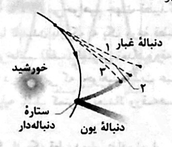
$$p_r=\frac{I}{c}=\frac{۳/۹۷\times۱۰^۹}{۳\times۱۰^۸}=۱۳/۲۳\mathrm{Pa}$$

(پ) چون نیرو به کره‌ای به قطر d وارد شده است، داریم

$$F_r=Ap_r=\left(\frac{\pi d^۲}{۴}\right)p_r=\left(\frac{p}{I}\right)p_r$$

$$=\frac{(۵/۰۰\times۱۰^{-۳})(۱۳/۲۳)}{۳/۹۷\times۱۰^۹}=۱/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{N}$$

۳۱●●●- وقتی ستارهٔ دنباله داری دور خورشید می‌چرخد، یخ روی سطح آن بخار شده ذره‌های غبار و یونهای گرفتار شده رها می‌شوند. چون یون‌ها به طور الکتریکی بار دارند به وسیلهٔ *باد خورشیدی* که آن نیز به طور الکتریکی باردار است به صورت یک *دنبالهٔ یون* مستقیم رانده شده و به طور شعاعی از خورشید دور می‌شوند (شکل ۳۹-۴۱). ذره‌های غبار (که از نظر الکتریکی خنثی هستند) توسط نیروی تابشی وارد بر آنها از طرف نور خورشید به طور شعاعی به دور از خورشید رانده می‌شوند. فرض کنید که ذره‌های غبار کروی و دارای چگالی $\rho=۳/۵\times۱۰^۳\ \mathrm{kg/m}^۳$ هستند و تمام نور خورشید را که به آنها می‌رسد جذب می‌کنند. (الف) برای اینکه ذره مسیری مستقیم مانند مسیر ۲ را در شکل طی کند شعاع آن چقدر باید باشد؟ (ب) اگر شعاع بزرگتر باشد، آیا مسیر منحنی آن از خورشید دور می‌شود (مانند مسیرا) یا به سمت خورشید خواهد بود؟ (مانند مسیر ۳)



شکل ۲۹-۳۹ مسئلهٔ ۳۱

حل: (الف) نیروی گرانشی خورشید باید نیروی ناشی از جذب تابش خورشید را خنثی نماید تا حرکت ذره در راستای مستقیم باشد. از جدول پیوست (پ) داده‌های مورد نیاز را بدست می‌آوریم.

$$F=\frac{IA}{C}=G\frac{m\mu_s}{r^۲}$$

$$I=\frac{W}{۴\pi r^۲}\Rightarrow\frac{W}{۴\pi r^۲}\frac{\pi R^۲}{C}=\frac{G\rho\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{r^۲}\mu_s$$

$$R=\frac{۳W}{۱۶\pi G\rho C\mu_s}$$

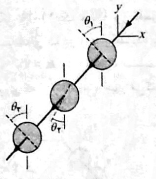
که با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت

$$R=۱/۷\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{m}$$

(ب) به سمت خورشید خواهد بود.

بخش ۲۹-۷ قطبش

۳۲●- در شکل ۲۹-۴۰، نور ناقطبیدهٔ اولیه‌ای به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد که جهت‌های قطبیدگی آنها با جهت محور y زاویه‌های $\theta_۱=\theta_۲=\theta_۳=۵۰^\circ$ می‌سازند. چه درصدی از شدت اولیه از سامانه عبور می‌کند؟ (راهنمایی: مراقب زاویه‌ها باشید.)



شکل ۲۹-۴۰ مسئله‌های ۳۲ و ۳۳

حل:

$$I_۱=\frac{I_۰}{۲}$$

$$I_۲=I_۱\cos^۲(\theta_۲+\theta_۱)=\frac{I_۰}{۲}\cos^۲(\theta_۲+\theta_۱)$$

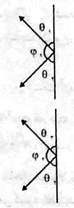
$$I_۳=I_۲\cos^۲(\theta_۳+\theta_۲)=\frac{I_۰}{۲}\cos^۲(\theta_۲+\theta_۱)\times$$

$$\cos^۲(\theta_۳+\theta_۲)$$

$$\frac{I_۳}{I_۰}=(\frac{۱}{۲})\cos^۲(۱۰۰)\cos^۲(۱۰۰)=۴/۵۵\times۱۰^{-۴}$$ یا $\%۰/۰۴۵$

۳۳●- SSM در شکل ۲۹-۴۰، نور ناقطبیدهٔ اولیه‌ای به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد که جهت قطبیدگی آنها با جهت محور y زاویه‌های $\theta_۱=۴۰^\circ$ ، $\theta_۲=۲۰^\circ$ و $\theta_۳=۴۰^\circ$ می‌سازند. چه درصدی از شدت اولیه از سامانه عبور می‌کند؟ (راهنمایی: مراقب زاویه‌ها باشید).

حل:



$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$

$\varphi = ۱۸۰ - (\theta_۱ + \theta_۲) = ۱۲۰^\circ$

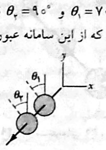
$I_۲ = I_۱ \cos^۲ \varphi_۱ = \frac{I_۰}{۲} \cos^۲ ۱۲۰$

$\varphi_۲ = ۱۸۰ - (\theta_۲ + \theta_۳) = ۱۲۰$

$I_۳ = I_۲ \cos^۲ \varphi_۲ = \frac{I_۰}{۲} \cos^۲ ۱۲۰ \cos^۲ ۱۲۰ = \frac{I_۰}{۲} \cos^۴ (۱۲۰)$

$\frac{I_۳}{I_۰} = ۰/۰۳۱۳$ یا ٪۳/۱۳

●۳۴- GO در شکل ۲۹-۴۱ یک باریکهٔ نور ناقطبیده با شدت $۴۳ W/m^۲$ به سامانه‌ای با دو ورقهٔ قطبنده با جهت‌های قطبیدگی با زاویهٔ $\theta_۱ = ۷۰^\circ$ و $\theta_۲ = ۹۰^\circ$ نسبت به محور y، می‌تابد. شدت نوری که از این سامانه عبور می‌کند چقدر است؟



شکل ۲۹-۴۱ مسئله‌های ۳۴، ۳۵ و ۴۲

حل: نور اولیهٔ قطبیده نیست بنابراین شدت نوری که از قطبندهٔ اول آن برابر است با:

$I_۱ = \frac{۱}{۲} I_۰$

این نور قطبیده است، بنابراین بعد از عبور از قطبندهٔ دوم، شدت آن برابر می‌شود با:

$I_۱ = I_۱ \cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱) = \frac{I_۰}{۲} \cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱)$

$I_۲ = \frac{(۴۳)}{۲} \cos^۲(۹۰ - ۷۰) = ۱۸/۹۸ \ W/m^۲$

●۳۵- ILW در شکل ۲۹-۴۱، باریکهٔ نور با شدت $۴۳ W/m^۲$ و قطبش موازی با محور y به سامانهٔ دو ورقهٔ قطبنده می‌تابد که جهتهای قطبیدگی آنها با محور y زاویهٔ $\theta_۱ = ۷۰^\circ$ و $\theta_۲ = ۹۰^\circ$ می‌سازند. شدت نوری که از دو ورقه عبور می‌کند چقدر است؟

حل: بر طبق قانون مالوس، اگر $I_۰$ شدت اولیهٔ نور باشد، بعد از عبور از قطبندهٔ اول شدت آن برابر است با:

$I_۱ = I_۰ \cos^۲ \theta_۱$

و بعد از عبور از قطبندهٔ دوم، شدت آن برابر است با:

$I_۲ = I_۱ \cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱) = I_۰ \cos^۲ \theta_۱ \cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱)$

$I_۲ = (۴۳) \cos^۲ ۷۰ . \cos^۲(۹۰ - ۷۰) = ۴/۴ \ W/m^۲$

●●۳۶- [redacted] نور در ساحل معمولاً به علت بازتاب‌هایی که از ماسه و آب صورت می‌گیرد قطبیدهٔ جزئی است. در یک ساحل معین و در یک روز معین، نزدیک غروب مؤلفهٔ افقی بردار میدان الکتریکی ۲/۳ برابر مؤلفهٔ عمودی است. شخصی که در ساحل ایستاده است عینکی با شیشه‌های قطبنده را به چشم می‌زند و عینک مؤلفهٔ افقی میدان را حذف می‌کند. (الف) چه کسری از شدت نوری که قبل از گذاشتن عینک به چشم شخص می‌رسید، حالا به چشم‌های او می‌رسد؟ (ب) شخصی که هنوز عینک را به چشم دارد، به پهلو دراز می‌کشد، چه کسری از شدت نوری که قبل از گذاشتن عینک به چشم شخص می‌رسید، اکنون به چشم او می‌رسد؟

حل:

$E_h = ۲/۳ Ev$

$E = \sqrt{E_h^۲ + E_v^۲} = \sqrt{(۲/۳ E_v} = ۲/۵۱ E_v$

$I_۱ \alpha E^۲ \alpha (۲/۵۱)^۲ E_v^۲$

(الف) با حذف مؤلفهٔ افقی، فقط مؤلفهٔ قائم به چشم می‌رسد.

$I_۲ \alpha E_v^۲$

بنابراین:

$\frac{I_۲}{I_۱} = \frac{E_v^۲}{(۲/۵)^۲ E_v^۲} = ۰/۱۶$ یا ٪۱۶

(ب) وقتی شخصی دراز می‌کشد، عینک او مؤلفهٔ قائم را حذف می‌کند. در این صورت:

$I_۲ \alpha E_h^۲ \alpha (۲/۳)^۲ E_v^۲$

$\frac{I_۲}{I_۱} = \frac{(۲/۳)^۲ E_v^۲}{(۲/۵)^۲ E_v^۲} = ۰/۸۴$ یا ٪۸۴

●●۳۷- SSM WWW می‌خواهیم جهت قطبیدگی یک باریکهٔ نور قطبیده را با تابانیدن باریکه به یک ورقهٔ قطبنده یا بیشتر به اندازهٔ ۹۰° بچرخانیم. (الف) کمترین تعداد ورقه‌های لازم چند تا است؟ (ب) در صورتی که بخواهیم شدت عبوری بیشتر از ٪۶۰ شدت اولیه باشد، کمترین تعداد ورقه‌های لازم چندتا است؟

حل: (الف) اگر از یک قطبنده استفاده نماییم، و زاویهٔ بین جهت اولیه و جهت قطبنده را ۹۰° انتخاب نماییم. جهت قطبندگی ۹۰° تغییر می‌کند ولی شدت عبوری صفر می‌باشد. پس حداقل باید از دو صفحه استفاده نماییم.

(ب) اگر از N صفحه استفاده نماییم:

$N\theta = ۹۰$ (۱)

$I = I_۰ \cos^{۲N} \theta \Rightarrow ۰/۶ = \cos^{۲N} \theta$ (۲)

که یک دستگاه دو معادله و دو مجهول است.

ساده‌ترین راه حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول، روش سعی و خطا می‌باشد.

$N = ۲ \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = (\cos ۴۵)^۴ = ۰/۲۵ < ۰/۶$

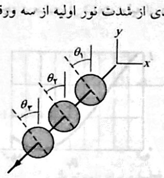
$N = ۳ \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = (\cos ۳۰)^۶ = ۰/۳۲ < ۰/۶$

$N = ۴ \Rightarrow \theta = ۲۲/۵^\circ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = (\cos ۲۲/۵)^۸ = ۰/۵۳ < ۰/۶$

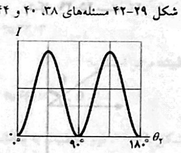
$N = ۵ \Rightarrow \theta = ۱۸^\circ \Rightarrow \frac{I}{I_۰} = (\cos ۱۸)^{۱۰} = ۰/۶۰۵$

پس می‌توان $N = ۵$ را فرض نمود.

●●۳۸- در شکل ۲۹-۴۲، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد. زاویه‌های $\theta_۱$ ، $\theta_۲$ و $\theta_۳$ جهت‌های قطبش به طور پادساعتگرد از جهت مثبت محور y اندازه‌گیری شده‌اند (آنها بدون مقیاس رسم شده‌اند). زاویه‌های $\theta_۱$ و $\theta_۳$ ثابت‌اند اما $\theta_۲$ می‌تواند تغییر کند. شکل ۲۹-۴۳ شدت نور خروجی از ورقهٔ ۳ را بر حسب تابعی از $\theta_۲$ به دست می‌دهد. (مقیاس محور شدت مشخص نشده است). وقتی $\theta_۲ = ۳۰^\circ$ باشد، چه درصدی از شدت نور اولیه از سه ورقه عبور می‌کند؟



شکل ۲۹-۴۲ مسئله‌های ۳۸، ۴۰ و ۴۴



شکل ۲۹-۴۳ مسئلهٔ ۳۸

حل:

$I_۱ = \frac{I_۰}{۲}$

$I_۲ = I_۱ \cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱) = \frac{I_۰}{۲} \cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱)$

$I_۳ = I_۲ \cos^۲(\theta_۳ - \theta_۲) = \frac{I_۰}{۲} \cos^۲(\theta_۲ - \theta_۱) \times$

$\cos^۲(\theta_۳ - \theta_۲)$

از نمودار مشخص است که در ۱۸۰ و ۹۰ و $\theta_۲ = ۰$ شدت $I_۳$ صفر و در ۱۳۵ و $\theta = ۴۵$ بیشینه است. پس:

$\theta_۲ = ۰ \Rightarrow I_۳ = \frac{I_۰}{۲} \cos^۲ \theta_۱ \cos^۲ \theta_۳ = ۰$ (۱)

$\cos \theta_۱ \cos \theta_۳ = ۰$

$\theta_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow I_۳ = \frac{I_۰}{۲} \cos^۲(۹۰ - \theta_۱) \cos^۲(\theta_۳ - ۹۰) = ۰$

$\sin \theta_۱ \sin \theta_۳ = ۰$ (۲)

از دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$\cos \theta_۳ = ۰ \Rightarrow \theta_۳ = \frac{\pi}{۲}$

$\sin \theta_۳ = ۰ \Rightarrow \theta_۱ = ۰$

و یا:

$\cos \theta_۱ = ۰ \Rightarrow \theta_۱ = \frac{\pi}{۲}$

$\sin \theta_۳ = ۰ \Rightarrow \theta_۳ = ۰$

بنابراین اگر $\theta_۲ = ۳۰^\circ$ باشد.

$\frac{I_۳}{I_۰} = (\frac{۱}{۲}) \cos^۲(۳۰ - ۰) \cos^۲(۹۰ - ۳۰) = ۰/۰۹۴$ یا ٪۹/۴

$\frac{I_۳}{I_۰} = (\frac{۱}{۲}) \cos^۲(۳۰ - ۹۰) \cos^۲(۱۸۰ - ۳۰) = ۰/۰۹۴$ یا ٪۹/۴

●●۳۹- نور ناقطبیده‌ای با شدت $۱۰ mW/m^۲$ مطابق شکل ۲۹-۱۱ به ورقهٔ قطبنده‌ای می‌تابد. (الف) دامنهٔ مؤلفهٔ میدان الکتریکی نور عبوری و (ب) فشار تابشی روی ورقه به خاطر جذب قسمتی از نور، چقدر است؟

حل: (الف)

$I = \frac{I_۰}{۲} = ۵ mW / m^۲$

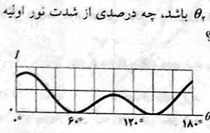
$I = \frac{E_m^۲}{۲\mu_۰ c} \Rightarrow E_m = \sqrt{۲\mu_۰ c I}$

$E_m = \sqrt{(۲)(۴\pi \times ۱۰^{-۷})(۳ \times ۱۰^۸)(۵ \times ۱۰^{-۳})} \simeq ۱/۹ V/m$

(ب)

$P_r = \frac{I}{c} = \frac{(۵ \times ۱۰^{-۳})}{(۳ \times ۱۰^۸)} = ۱/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} Pa$

●●۴۰- در شکل ۲۹-۴۲، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد. زاویه‌های $\theta_۱$ ، $\theta_۲$ و $\theta_۳$ جهت‌های قطبیدگی به طور پاد ساعتگرد از جهت مثبت محور y اندازه‌گیری شده‌اند (آنها بدون مقیاس رسم شده‌اند). زاویه‌های $\theta_۱$ و $\theta_۳$ ثابت‌اند اما زاویهٔ $\theta_۲$ می‌تواند تغییر کند. شکل ۲۹-۴۴ شدت نور خروجی از ورقهٔ ۳ را برحسب تابعی از $\theta_۲$ به دست می‌دهد. (مقیاس محور شدت مشخص نشده است.) وقتی $\theta_۲ = ۹۰^\circ$ باشد، چه درصدی از شدت نور اولیه از سامانه عبور می‌کند؟



شکل ۲۹-۴۴ مسئلهٔ ۴۰

حل:

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$$I_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1)$$

$$I_3 = I_2 \cos^2(\theta_3 - \theta_2) = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1) \times \cos^2(\theta_3 - \theta_2)$$

از نمودار مشخص است اگر ۱۴۰ ، $\theta_2 = 60^\circ$ باشد، I_3 صفر می‌گردد. بنابراین:

$$\theta_2 = 60^\circ \Rightarrow I_3 = I_3 = \frac{I_0}{2}\cos^2(60 - \theta_1)\cos^2(\theta_3 - 60) = 0$$

$$\cos(60 - \theta_1)\cos(\theta_3 - 60) = 0$$

یکی از دو جملهٔ مربوط به کسینوس صفر است بنابراین:

$$\cos(160 - \theta_1) = 0 = \cos -90^\circ \Rightarrow 60 - \theta_1 = -90 \Rightarrow$$

$$\theta_1 = 150^\circ$$

$$\cos(\theta_3 - 60) = \cos -90^\circ \Rightarrow \theta_3 = 150^\circ$$

$$\theta_2 = 140^\circ$$

$$\cos(\theta_3 - 140) = \cos(-90^\circ) \Rightarrow \theta_1 = 50^\circ$$

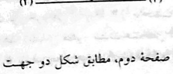
$$\cos(140 - \theta_1) = \cos(90^\circ) \Rightarrow \theta_1 = 50^\circ$$

$$\theta_2 = 90^\circ \quad \theta_1 = 50^\circ \quad \theta_3 = 150^\circ$$

$$\frac{I_3}{I_0} = (\frac{1}{2})\cos^2(90 - 50)\cos^2(150 - 90) = 0/073 = \%7/3$$

۴۱●●- باریکهٔ نور قطبیده‌ای به سامانه‌ای شامل دو ورقهٔ قطبنده می‌تابد. نسبت به جهت قطبش نور تابیده جهت‌های قطبیدگی ورقه‌ها عبارت‌اند از زاویهٔ θ برای اولین ورقه و 90° برای دومین ورقه. اگر ۰/۱۰ شدت فرودی از دو ورقه عبور کند، θ چقدر است؟

حل:



$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

برای قطبندگی صفحهٔ دوم، مطابق شکل دو جهت امکان دارد. بنابراین:

حالت اول $I_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 + \theta_1) = I_0 \cos^2\theta \cos^2(90 - \theta)$

$$= I_0 \cos^2\theta \sin^2\theta$$

حالت دوم $I_2' = I_1 \cos^2(\theta_2 + \theta) = I_0 \cos^2\theta \cos^2(90 + \theta)$

$$= I_0 \cos^2\theta \sin^2\theta$$

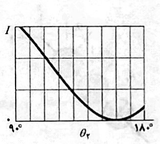
$$I_2 = \frac{I_0}{4}\sin^2\theta$$

$$\frac{I_2}{I_0} = 0/1 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta \Rightarrow \sin 2\theta = 0/632 = \sin 40^\circ, \sin 140^\circ$$

$$2\theta = 40^\circ \Rightarrow \theta = 20^\circ$$

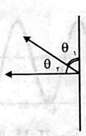
$$2\theta = 140^\circ \Rightarrow \theta = 70^\circ$$

۴۲●●- در شکل ۲۹-۴۱، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل دو ورقهٔ قطبنده می‌تابد. زاویه‌های θ_1 و θ_2 جهت‌های قطبش ورقه‌ها به طور پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور y اندازه‌گیری شده‌اند (آنها بدون مقیاس در شکل رسم شده‌اند). زاویهٔ θ_1 ثابت است اما زاویهٔ θ_2 می‌تواند تغییر کند. شکل ۲۹-۴۴ شدت نور خروجی از ورقهٔ ۲ را برحسب θ_2 به دست می‌دهد. (مقیاس محور شدت مشخص نشده است.) وقتی $\theta_2 = 90^\circ$ باشد، چه درصدی از شدت اولیه از دو ورقه عبور می‌کند؟



شکل ۲۹-۴۵ مسئلهٔ ۴۲

حل:



$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$$I_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) = \frac{I_0}{2}\cos^2(\theta_2 - \theta_1)$$

هنگامی که $\theta_2 = 160^\circ$ می‌باشد، شدت I_2 صفر است پس جهت قطبش آنها ابرهم عمود می‌باشد.

$$\theta_2 - \theta_1 = 90^\circ \Rightarrow 160 - \theta_1 = 90$$

$$\theta_1 = 70^\circ$$

$$\theta_2 = 90 \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = 90 - 70 = 20$$

$$I_2 = \frac{I_0}{2}\cos^2 20 \Rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 0/442$$ یا ۴۴/۲%

۴۳●●- یک باریکهٔ نور را که به طور جزئی قطبیده است می‌توان ترکیب نور قطبیده و ناقطبیده در نظر گرفت. فرض کنید چنین باریکه‌ای را به یک پالایهٔ قطبنده بتابانیم و سپس در حالی که پالایه را عمود بر باریکه نگه داشته‌ایم آن را 360° بچرخانیم. اگر در این چرخش شدت نور عبوری با ضریب ۵/۰ تغییر کند، چه کسری از شدت باریکهٔ اولیه به نور باریکهٔ قطبیده مربوط بوده است؟

حل: فرض می‌کنیم I_0 شدت نور غیر قطبیده و I_1 نور قطبیده در نور ورودی می‌باشد. در این صورت بعد از عبور از یک صفحهٔ قطبیده، شدت نور I' برابر است با:

$$I' = \frac{I_0}{2} + I_1 \cos^2\theta$$

که θ زاویهٔ بین جهت قطبنده و جهت قطبندگی نور ورودی است. در $\theta = 0$، شدت نور I' بیشینه و در $\theta = \frac{\pi}{2}$ این شدت کمینه است.

$$I_1' = \frac{I_0}{2} + I_1$$

$$I_2' = \frac{I_0}{2}$$

بر طبق فرض مسئله $I_1' = 5I_2'$

$$I_1' = 5I_2' \Rightarrow 5(\frac{I_0}{2}) = \frac{I_0}{2} + I_1$$

$$I_1 = 2I_0$$

شدت نور غیر قطبیده برابر است با:

$$\frac{I_0}{I_1 + I_0} = \frac{2}{3}$$ یا ۳۳/۳%

شدت نور قطبیده برابر است با:

$$\frac{I_1}{I_1 + I_0} = \frac{2}{3}$$ یا ۶۶/۷%

۴۴●●- در شکل ۲۹-۴۲، نور ناقطبیده به سامانه‌ای شامل سه ورقه می‌تابد که ۰/۰۵۰۰ شدت نور اولیه را عبور می‌دهد. جهت‌های قطبیدگی اولین و سومین ورقه زاویه‌های $\theta_1 = 0^\circ$ و $\theta_3 = 90^\circ$ می‌سازند. مطلوب است مقدار (الف) کمتر و (ب) بیشتر زاویهٔ ممکن $\theta_2 (< 90^\circ)$ برای جهت قطبیدگی ورقهٔ ۲.

حل: (الف) و (ب)

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

$$I_2 = I_1 \cos^2(\theta_2 - 0) = I_1 \cos^2\theta_2 = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta_2$$

$$I_3 = I_2 \cos^2(\theta_3 - \theta_2) = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta_2 \cos^2(90 - \theta_2)$$

$$= \frac{I_0}{2}\cos^2\theta_2 \sin^2\theta_2$$

$$\frac{I_3}{I_2} = 0/05 = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta_2 = \frac{1}{8}\sin^2 2\theta_2$$

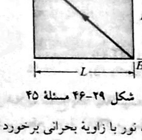
و جواب دیگر برابر است با:

$$\sin 2\theta_2 = 0/4 \Rightarrow 2\theta_2 = 23/6^\circ \Rightarrow \theta_2 = 11/8^\circ$$

$$2\theta_2 = 156/4^\circ \Rightarrow \theta_2 = 78/2^\circ$$

بخش ۲۹-۸ بازتاب و شکست

۴۵●- وقتی مخزن مکعب مستطیل فلزی در شکل ۲۹-۴۶ پر از مایع نامشخصی است، ناظری که چشمهایش هم سطح بالای مخزن است فقط می‌تواند گوشهٔ E را ببیند؛ پرتوی که در سطح بالای مایع به سمت O شکسته می‌شود نشان داده شده است. اگر $D = 85/0\ cm$ و $L = 1/10\ m$ باشد، ضریب شکست مایع چقدر است؟



شکل ۲۹-۴۶ مسئلهٔ ۴۵

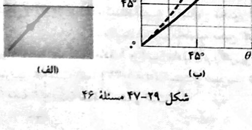
حل: در سطح مایع، نور با زاویهٔ بحرانی برخورد کرده است.

$$\tan\theta_c = \frac{L}{D} = \frac{1/1}{0/85} = 1/294$$

$$\theta_c = 52/3^\circ$$

$$n = \frac{1}{\sin\theta_c} = \frac{1}{\sin 52/3} = 1/26$$

۴۶●- در شکل ۲۹-۴۷ الف، پرتو نور از مادهٔ زیر با زاویهٔ θ_1 روی سطح جدایی با آب فرود می‌آید. و مقداری از نور در آب می‌شکند. دو انتخاب برای مادهٔ زیر وجود دارد. برای هر یک، زاویهٔ شکست θ_2 برحسب زاویهٔ فرود θ_1 در شکل ۲۹-۵۰ ب نشان داده شده است. مقیاس محور افقی با $\theta_{1s} = 90^\circ$ مشخص شده است. بدون محاسبه، مشخص کنید که آیا ضریب شکست (الف) مادهٔ ۱ و (ب) مادهٔ ۲ بزرگتر یا کوچکتر از ضریب شکست آب ($n = 1/33$) است؟ ضریب شکست (پ) مادهٔ ۱ و (ت) مادهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۲۹-۴۷ مسئلهٔ ۴۶

حل: پرتو نور از درون ماده با زاویهٔ θ_1 به سطح آب برخورد کرده و با زاویهٔ θ_2 به درون آن وارد شده است اگر $\theta_1 > \theta_2$ باشد، $n < n_w$ است و برعکس اگر $\theta_1 < \theta_2$ باشد $n > n_w$ می‌باشد. (الف) و (ب) به ازای زاویهٔ $\theta_1 = ۴۸^\circ$ برای مادهٔ (۱) $\theta_2 = ۹۰$ برای مادهٔ (۲) $\theta_2' = ۴۸^\circ$ می‌باشد، پس هر دو ماده دارای ضریب شکستنی بیشتر از آب هستند. (اشعه‌ها موقع ورود به آب از خط عمود دور شده‌اند).

(ج) برای مادهٔ (۱) داریم:

$$\theta_2 = ۹۰ \Rightarrow \theta_1 = ۴۵^\circ$$

از قانون اسنل- دکارت داریم:

$$n_w \sin ۹۰ = n_1 \sin ۴۵ \Rightarrow n_1 = \frac{(۱/۳۳)(۱)}{\left(\sqrt{۲}/۲\right)} = ۱/۸۸$$

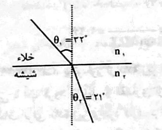
(د) برای مادهٔ (۲) داریم:

$$\theta_2 = ۹۰^\circ \Rightarrow \theta_1 = ۶۷/۵^\circ$$

$$n_2 = \frac{n_w \sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{(۱/۳۳)(۱)}{(\sin ۶۷/۵)} = ۱/۴۴$$

●۴۷- نوری در خلأ به سطح یک تیغهٔ شیشه‌ای می‌تابد. باریکه در خلأ با عمود بر سطح زاویهٔ $۳۲/۰^\circ$ می‌سازد، در حالی که در شیشه با عمود زاویهٔ $۲۱/۰^\circ$ می‌سازد. ضریب شکست شیشه چقدر است؟

حل:

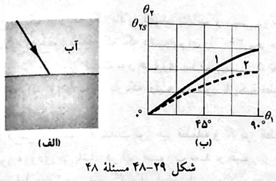


$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$(۱)\sin ۳۲ = n_2 \sin ۲۱$$

$$n_2 = \frac{\sin ۳۲}{\sin ۲۱} = ۱/۴۸$$

●۴۸- در شکل ۲۹-۴۸ الف، یک پرتو نور در آب با زاویهٔ θ_1 روی مرزی که زیر آن ماده است فرود می‌آید، قسمتی از نور شکسته شده به داخل ماده می‌رود. دو انتخاب برای ماده وجود دارد. برای هر یک، زاویهٔ شکست θ_2 برحسب زاویهٔ فرود θ_1 در شکل ۲۹-۴۸ ب داده شده است. مقیاس محور قائم با $\theta_{2s} = ۹۰^\circ$ مشخص شده است. بدون محاسبه معین کنید، آیا ضریب شکست (الف) مادهٔ ۱ و (ب) مادهٔ ۲ بزرگتر یا کوچکتر از ضریب شکست آب $(n = ۱/۳۳)$ است؟ ضریب شکست (پ) مادهٔ ۱ و (ت) مادهٔ ۲ چقدر است؟



شکل ۲۹-۴۸ مسئلهٔ ۴۸

حل: (الف) و (ب) پرتو نور از آب وارد محیط دیگر شده است. اگر $n > n_w$ (n_w ضریب شکست آب) باشد، پرتو شکست به خط عمود نزدیک می‌گردد و اگر $n < n_w$ باشد، پرتو شکست از خط عمود دورتر می‌گردد.

از نمودار مشخص است، برای زاویهٔ $\theta_1 = ۴۵^\circ$، برای مادهٔ (۱) و (۲) $\theta_2 < ۴۵^\circ$ می‌باشد، یعنی ضریب شکست هر دو بیشتر از آب است.

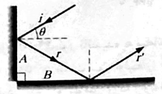
(ج) و (د) در $\theta_1 = ۹۰^\circ$، برای مادهٔ (۱) $\theta = ۶۷/۵^\circ$ و برای مادهٔ (۲) $\theta = ۴۵^\circ$ می‌باشد. این زاویه، برای هر دو ماده، زاویهٔ بحرانی است.

$$n_w \sin ۹۰ = n_1 \sin ۶۷/۵ \quad \text{مادهٔ (۱)}$$

$$n_1 = \frac{(۱/۳۳)(۱)}{(۰/۹۲)}$$

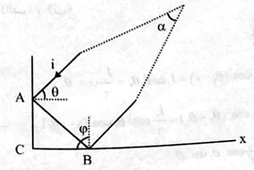
$$n_2 = \frac{(۱/۳۳)(۱)}{\sin ۴۵} = ۱/۸۸ \quad \text{مادهٔ (۲)}$$

●۴۹- شکل ۲۹-۴۹ نور بازتابیده را از دو سطح بازتاب دهندهٔ عمود بر هم A و B نشان می‌دهد. زاویهٔ بین پرتو ورودی i و پرتو خروجی r' را به دست آورید.



شکل ۲۹-۴۹ مسئلهٔ ۴۹

حل:



$$\hat{A} = ۹۰ - \theta$$

$$\hat{B} = ۹۰ - A = \theta$$

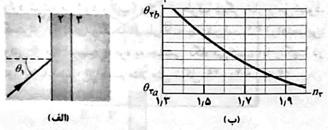
$$\varphi = ۹۰ - B = ۹۰ - \theta \Rightarrow \varphi + \theta = ۹۰$$

اگر دو پرتو همدیگر را قطع کنند. زاویهٔ α بین آنها برابر است با:

$$\alpha = ۱۸۰ - ۲(\theta + \varphi) = ۰$$

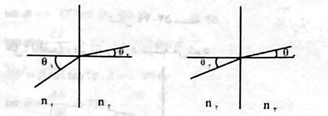
یعنی دو پرتو موازی هستند.

●●۵۰- در شکل ۲۹-۵۰ الف، باریکهٔ نوری در محیط ۱ با زاویهٔ $\theta_1 = ۴۰^\circ$ روی سطح جدایی فرود می‌آید. بخشی از نور وارد محیط ۲ و سپس بخشی وارد محیط ۳ می‌شود. دو سطح جدایی میان سه محیط موازی‌اند. راستای نهایی باریکه بستگی به ضریب شکست n_3 محیط ۳ دارد. شکل ۲۹-۵۰ ب زاویهٔ شکست θ_3 در آن محیط را برحسب n_3 برای حدود مقدارهای ممکن n_3، به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\theta_{3a} = ۳۰/۰^\circ$ و $\theta_{3b} = ۵۰/۰^\circ$ مشخص شده است. (الف) ضریب شکست محیط ۱ چقدر است، یا بدون اطلاعات بیشتر محاسبهٔ ضریب ممکن نیست؟ (ب) ضریب شکست محیط ۲ چقدر است، یا بدون اطلاعات بیشتر محاسبهٔ ضریب ممکن نیست؟ (پ) اگر θ_1 به ۷۰° تغییر کند و ضریب شکست محیط ۳ برابر ۲/۴ باشد، θ_3 چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۰ مسئلهٔ ۵۰

حل:



(الف) از نمودار مشخص است:

در $\theta_3 = ۴۰^\circ$ ، $n_3 = ۱/۶$ می‌باشد.

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3$$

$$n_1 \sin ۴۰ = (۱/۶)\sin ۴۰ \Rightarrow n_1 = ۱/۶$$

(ب) ضریب شکست مادهٔ (۲) را نمی‌توان بدون اطلاعات دیگر بدست آورد.

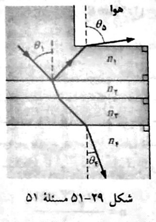
(پ)

$$\theta_1 = ۷۰^\circ, n_3 = ۲/۴$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_3 \sin\theta_3 \Rightarrow (۱/۶)\sin ۷۰ = ۲/۴ \sin\theta_3$$

$$\sin\theta_3 = ۰/۶۲۶ \Rightarrow \theta_3 = ۳۸/۸^\circ$$

●●۵۱- در شکل ۲۹-۵۱، نور با زاویهٔ $\theta_1 = ۴۰/۱^\circ$ به سطح جدایی دو محیط شفاف فرود می‌آید. قسمتی از نور به سمت پایین و از میان سه محیط شفاف دیگر حرکت می‌کند، در حالی که قسمت دیگری از آن به سمت بالا بازتابیده شده و سپس وارد هوا می‌شود. اگر $n = ۱/۳۰$ ، $n_2 = ۱/۴۰$ ، $n_3 = ۱/۳۲$ و $n_4 = ۱/۴۵$ باشد، مقدار (الف) θ_5 و (ب) θ_4 چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۱ مسئلهٔ ۵۱

حل: (الف) برای نوری که از محیط (۱) وارد هوا می‌شود:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$(۱/۳۰)\sin ۴۰/۱ = (۱)\sin\theta_5$$

$$\sin\theta_5 = ۰/۸۳۷ \Rightarrow \theta_5 = ۵۶/۹^\circ$$

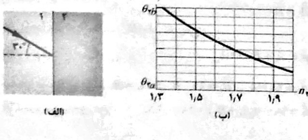
(ب)

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 = n_4 \sin\theta_4$$

$$(۱/۳۰)\sin ۴۰/۱ = (۱/۴۵)\sin\theta_4$$

$$\sin\theta_4 = ۰/۵۷۸ \Rightarrow \theta_4 = ۳۵/۳^\circ$$

●●۵۲- در شکل ۲۹-۵۲ الف، یک باریکهٔ نوری در محیط ۱ با زاویهٔ $\theta_1 = ۳۰^\circ$ به سطح جدایی فرود می‌آید. میزان شکست نور به داخل محیط ۲ بخشی به ضریب شکست n_2 محیط ۲ بستگی دارد. شکل ۲۹-۵۲ ب، زاویهٔ شکست θ_2 را برحسب n_2 برای گسترهٔ ممکنی از مقدارهای n_2 به دست می‌دهد. مقیاس محور قائم با $\theta_{2a} = ۲۰/۰^\circ$ و $\theta_{2b} = ۴۰/۰^\circ$ مشخص شده است. (الف) ضریب شکست مادهٔ ۱ چقدر است؟ (ب) اگر زاویهٔ فرود به ۶۰° تغییر کند و مادهٔ ۲ دارای $n_2 = ۲/۴$ باشد، آنگاه زاویهٔ θ_2 چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۲ مسئلهٔ ۵۲

حل:

(الف) $n_۲ = ۱/۶ \Rightarrow \theta_۲ = ۳۲°$

$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲$

$n_۱ \sin ۳۰ = (۱/۶۰) \sin ۳۲ \Rightarrow n_۱ = ۱/۶۹۵$

(ب) $n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲$

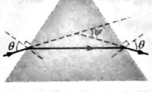
$(۱/۶۹۵) \sin ۶۰ = (۲/۴) \sin\theta_۲$

$\sin\theta_۲ = ۰/۶۱ \Rightarrow \theta_۲ = ۳۷/۶°$

●●۵۳- WWW ILW SSM در شکل ۲۹-۵۳، پرتوی به یک وجه منشور شیشه‌ای مثلثی شکل واقع در هوا می‌تابد. زاویهٔ فرود θ طوری انتخاب شده است که پرتو خروجی نیز همان زاویهٔ θ را با عمود بر سطح می‌سازد. نشان دهید که ضریب شکست منشور شیشه‌ای با این رابطه داده می‌شود

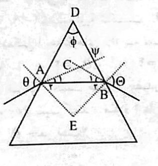
$$n = \frac{\sin\frac{۱}{۲}(\Psi + \phi)}{\sin\frac{۱}{۲}\phi}$$

که در آن ϕ زاویهٔ رأس منشور و Ψ *زاویهٔ انحراف* یعنی کل زاویه‌ای است که باریکه موقع عبور از منشور چرخیده است. (در این شرایط زاویهٔ انحراف کوچکترین مقدار ممکن را دارد که **زاویه** *کمینهٔ انحراف* نامیده می‌شود.)



شکل ۲۹-۵۳ مسئله‌های ۵۳ و ۶۴

حل:



$\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$

$\hat{\psi}$ زاویهٔ خارجی مثلث ABC است. پس:

$\hat{\psi} = \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = ۲\hat{A}_۱$ (۱)

$\hat{A}_۲ = ۹۰ - \hat{A}_۱ \ , \ \hat{B}_۲ = ۹۰ - \hat{B}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B}_۲$

$\hat{E} = ۱۸۰ - (A_۲ + B_۲) = ۱۸۰ - ۲\hat{A}_۲$ (۲)

در چهار ضلعی محاطی $ADBE$، مجموع زوایای روبرو $۱۸۰°$ است.

$\hat{E} + \hat{\phi} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{\phi} = ۲\hat{A}_۲$

از روابط (۱) و (۳) داریم:

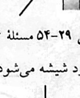
$\hat{A}_۱ = \frac{\hat{\psi}}{۲} \ , \ \hat{A}_۲ = \frac{\hat{\phi}}{۲}$

$\hat{\theta} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \frac{۱}{۲}(\hat{\psi} + \hat{\phi})$

$n_۱ \sin\theta = n \sin A_۲ \Rightarrow (۱) \sin\frac{۱}{۲}(\hat{\psi} + \hat{\phi}) = n \sin\frac{۱}{۲}\hat{\phi}$

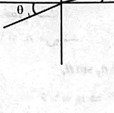
$$n = \frac{\sin\frac{۱}{۲}(\hat{\psi} + \hat{\phi})}{\sin(\frac{۱}{۲}\hat{\phi})}$$

●●۵۴- [redacted] *پاشندگی در شیشهٔ پنجره.* در شکل ۲۹-۵۴، یک باریکهٔ نور سفید با زاویهٔ $\theta = ۵۰°$ روی شیشهٔ یک پنجرهٔ معمولی (سطح مقطع نشان داده شده است) فرود می‌آید. برای چنین شیشه‌هایی ضریب شکست برای نور مرئی از ۱/۵۲۴ برای آبی در یک طرف طیف تا ۱/۵۰۹ برای ترمز در طرف دیگر طیف تغییر می‌کند. دو طرف شیشه موازی‌اند. (الف) وقتی نور وارد شیشه می‌شود و (ب) وقتی از طرف دیگر خارج می‌شود، گسترش زاویه‌ای رنگ‌ها در باریکه چقدر است؟ (راهنمایی: وقتی از میان شیشهٔ پنجره به جسمی نگاه می‌کنید، آیا رنگها در نور پاشیده شده از جسم مثلاً مثل شکل ۲۹-۲۰ هستند؟)



شکل ۲۹-۵۴ مسئلهٔ ۵۴

حل: (الف) وقتی نور وارد شیشه می‌شود



$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲$

$(۱) \sin ۵۰ = ۱/۵۲۴ \sin\theta_۲$

$\sin\theta_۲ = ۰/۵۰۳ \Rightarrow$ آبی $\quad \theta_۲ = ۳۰/۱۹۸$

$(۱) \sin ۵۰ = ۱/۵۰۹ \sin\theta_۲$

$\sin\theta_۲ = ۰/۵۰۸ \Rightarrow$ قرمز $\quad \theta_۲ = ۳۰/۵۳۱$

پاشندگی زاویه‌ای درون شیشه برابر است با:

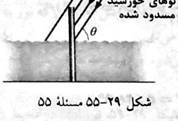
پاشندگی $\Delta\theta = ۳۰/۵۳۱ - ۳۰/۱۹۸ = ۰/۳۳۳°$

(ب) موقع خروج از شیشه:

$n_۱ \sin\theta_۱ = n_۲ \sin\theta_۲ = n_۳ \sin\theta_۳$

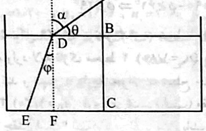
که $n_۱ = n_۳$ می‌باشد پس $\theta_۳ = \theta_۱ = ۵۰$

●●۵۵- GO در شکل ۲۹-۵۵، میله‌ای به طول ۲/۰۰m به طور قائم از ته استخر شنا تا ۵۰/۰cm بالای آب قرار دارد. نور خورشید با زاویهٔ $\theta = ۵۵/۰°$ می‌تابد. طول سایهٔ میله در کف استخر چقدر است؟



شکل ۲۹-۵۵ مسئلهٔ ۵۵

حل:



$\alpha = ۹۰ - \theta = ۳۵°$

$n_۱ \sin\alpha = n_۲ \sin\varphi \Rightarrow (۱) \sin ۳۵ = (۱/۳۳) \sin\varphi$

$\sin\varphi = ۰/۴۳۱ \Rightarrow \varphi = ۲۵/۵°$

$\tan\varphi = \frac{EF}{DF} \Rightarrow EF = (DF) \tan\varphi$

$EF = (۱/۵) \tan ۲۵/۵ = ۰/۷۲ \text{m}$

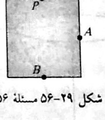
$\tan\theta = \frac{AB}{DB} \Rightarrow DB = \frac{AB}{\tan\theta}$

$DB = \frac{(۰/۵)}{\tan ۵۵} = ۰/۳۵$

EC طول سایه در کف استخر است.

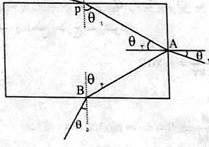
$EC = ۰/۷۲ + ۰/۳۵ = ۱/۰۷$

●●۵۶- [redacted] **رنگین کمان از قطرهٔ مربع شکل.** فرض کنید در یک دنیای خیالی، قطره‌های باران دارای سطح مقطع مربعی و همیشه در حین سقوط یک وجه آن افقی است. شکل ۲۹-۵۶ سقوط چنین قطره‌هایی را با باریکهٔ سفید نور خورشید که با زاویهٔ $\theta = ۷۰/۰°$ در نقطهٔ P فرود می‌آید نشان می‌دهد. قسمتی از نور وارد قطره می‌شود و سپس به نقطهٔ A می‌رود، جایی که قسمتی از آن به سمت خارج شکسته شده و وارد هوا می‌شود و بقیه باز می‌تابد. سپس این نور بازتابیده به نقطهٔ B می‌رود و در آنجا دوباره قسمتی به سمت خارج شکسته شده و وارد هوا می‌شود و بقیه بازمی‌تابد. اختلاف بین زاویه‌های نور قرمز $(n = ۱/۳۳۱)$ و نور آبی $(n = ۱/۳۴۳)$ که از (الف) نقطهٔ A و (ب) نقطهٔ B خارج می‌شوند چقدر است؟ (این اختلاف زاویه در نور خروجی مثلاً در نقطهٔ A باید پهنای رنگین کمانی باشد که شما در هنگام خروج از آن نقطه مشاهده می‌کنید.)



شکل ۲۹-۵۶ مسئلهٔ ۵۶

حل:



نور قرمز $\quad n_r = ۱/۳۳۱$

نور آبی $\quad n_b = ۱/۳۴۳$

$n_a \sin\theta = n \sin\theta_۱$

که در آن n_a ضریب شکست هوا و n ضریب شکست قطره‌های باران می‌باشد. برای نور قرمز از زاویه θ و برای نور آبی از زاویهٔ ϕ استفاده می‌شود.

(الف) برای نور قرمز: $(۱) \sin ۷۰ = (۱/۳۳۱) \sin\theta_۱$

$\sin\theta_۱ = ۰/۷۰۶ \Rightarrow \theta_۱ = ۴۴/۹$

برای نور آبی: $(۱) \sin ۷۰ = (۱/۳۴۳) \sin\phi_۱$

$\sin\phi_۱ = ۰/۷۰۰ \Rightarrow \phi_۱ = ۴۴/۴۳$

در برخورد به نقطهٔ A: $\theta_۲ = ۹۰ - \theta_۱ = ۴۵/۱°$

$n \sin\theta_۲ = n_a \sin\theta_۳$

$(۱/۳۳۱) \sin ۴۵/۱ = (۱) \sin\theta_۳$

$\sin\theta_۳ = ۰/۹۴۳ \Rightarrow \theta_۳ = ۷۰/۶°$

$\phi_۲ = ۹۰ - \phi_۱ = ۴۵/۳۵°$

$(۱/۳۴۳)\sin ۴۵/۳۵ = (۱)\sin\phi_۲$

$\sin\phi_۲ = ۰/۹۶۰ \Rightarrow \phi_۲ = ۷۳/۷^\circ$

در برخورد به نقطهٔ B $\qquad \theta_۲ = ۹۰ - \theta_۲ = ۴۴/۹ = \theta_۱$

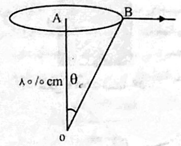
$\phi_۲ = ۹۰ - \phi_۲ = ۴۴/۴۳ = \phi_۱$

هر دو پرتو با همان زاویه از قطره خارج می‌شوند.

بخش ۲۹-۹ بازتاب داخلی کلی

●۵۷- یک چشمهٔ نقطه‌ای نور $۸۰/۰\,cm$ زیر سطح آب قرار دارد. قطر دایره‌ای در سطح آب را که نور از آن خارج می‌شود به دست آورید.

حل:



پرتو نوری که با زاویهٔ بزرگتر از θ_c زاویهٔ بحرانی به سطح آب برخورد کند از سطح خارج نمی‌شود.

$$\sin\theta_c = \frac{۱}{۱/۳۳} = ۰/۷۵۲$$

$$\theta_c = ۴۸/۸$$

$$\tan\theta_c = \frac{R}{OA} \Rightarrow R = ۰/۸۰\tan ۴۸/۸ = ۰/۹۱cm$$

قطره دایره برابر است با:

$$D = ۲R = ۱/۸۲m$$

●۵۸- ضریب شکست بنزن ۱/۸ است. برای یک پرتو نور که در بنزن به سمت لایهٔ مسطح هوا در بالای بنزن حرکت می‌کند، زاویهٔ حد چقدر است؟

حل: اگر نور از محیط (۲) وارد محیط (۱) شود و $n_۲ > n_۱$ باشد:

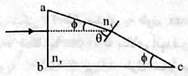
$$\sin\theta_c = \frac{n_۱}{n_۲} = \frac{(۱)}{(۱/۸)} = ۰/۵۵۶$$

$$\theta_c = ۳۳/۸^\circ$$

●●۵۹- SSM ILW در شکل ۲۹-۵۷، یک پرتو نور بر وجه ab یک منشور شیشه‌ای $(n=۱/۵۲)$ عمود است. اگر منشور (الف) در هوا و (ب) در آب قرار داشته باشد، بزرگترین مقدار زاویهٔ ϕ را پیدا کنید در صورتی که پرتو در وجه ac بازتاب کلی پیدا کند.

شکل ۲۹-۵۷ مسئلهٔ ۵۹

حل:



زاویهٔ بحرانی برابر است با:

$$\sin\theta_c = \frac{n_۱}{n_۲}$$

(الف) $\qquad \sin\theta_c = \frac{(۱)}{(۱/۵۲)} = ۰/۶۵۸ \Rightarrow \theta_c = ۴۱/۱^\circ$

شرط بازتابش کلی از سطح ac برابر است با:

$$\theta \geq ۴۱/۱^\circ$$

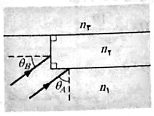
$$۹۰ - \phi \geq ۴۱/۱^\circ \Rightarrow \phi \leq ۴۸/۹^\circ$$

(ب) $\qquad \sin\theta_c = \frac{(۱/۳۳)}{(۱/۵۲)} = ۰/۸۷۵ \Rightarrow \theta_c = ۶۱^\circ$

$$\theta \geq ۶۱^\circ \Rightarrow ۹۰ - \phi \geq ۶۱^\circ \Rightarrow \phi \leq ۲۹^\circ$$

●●۶۰- در شکل ۲۹-۵۸، پرتو A از محیط ۱ $(n_۱=۱/۶۰)$ شکسته شده وارد لایهٔ نازک محیط ۲ $(n_۲=۱/۸۰)$ می‌شود، از آن عبور می‌کند و سپس با زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ $(n_۳=۱/۳۰)$ فرود می‌آید. (الف) مقدار زاویهٔ فرودی θ_A چقدر است؟ (ب) اگر θ_A کاهش یابد، آیا قسمتی از نور شکسته شده و وارد محیط ۳ می‌شود؟

پرتو B از محیط ۱ شکسته شده و وارد لایهٔ نازکی می‌شود و از آن عبور می‌کند و سپس با زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ فرود می‌آید. (پ) مقدار زاویهٔ فرود θ_B چقدر است؟ (ت) اگر θ_B کاهش یابد، آیا قسمتی از نور به داخل محیط ۳ شکسته می‌شود؟



شکل ۲۹-۵۸ مسئلهٔ ۶۰

حل: (الف) برای آنکه $\theta_۲ = \theta_c$ باشد لازم است که $\theta_۳ = ۹۰^\circ$ باشد. آنگاه خواهیم داشت

$$n_۱\sin\theta_۱ = n_۲\sin\theta_۲ = n_۳\sin\theta_۳$$

و از آنجا

$$\theta_۱ = \theta_A = \sin^{-۱}\frac{n_۳}{n_۱} = \sin^{-۱}\left(\frac{۱/۳۰}{۱/۶۰}\right) = ۵۴/۳^\circ$$

(ب) بله. با کاهش θ_A، $\theta_۲$ نیز کاهش می‌یابد به گونه‌ای که کمتر از زاویهٔ بحرانی می‌شود. بنابراین قدری گذار نور به مادهٔ ۳ داریم.

(پ) توجه کنید متمم زاویهٔ شکست (در مادهٔ ۲) برابر با زاویهٔ بحرانی است. در نتیجه داریم

$$n_۱\sin\theta_B = n_۲\cos\theta_c = n_۲\sqrt{۱-\left(\frac{n_۳}{n_۲}\right)^۲} = \sqrt{n_۲^۲ - n_۳^۲}$$

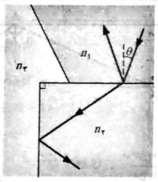
و از آنجا

$$\theta_B = \sin^{-۱}\left(\frac{\sqrt{n_۲^۲ - n_۳^۲}}{n_۱}\right) = \sin^{-۱}\left(\frac{\sqrt{(۱/۸۰)^۲ - (۱/۳۰)^۲}}{۱/۶۰}\right)$$

$$= ۵۱/۱^\circ$$

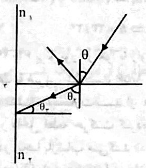
(ت) نه. کاهش θ_B به افزایش زاویه‌ای که نور به سطح مشترک ماده‌های ۲ و ۳ می‌تابد، می‌انجامد. بنابراین این زاویه بزرگتر از زاویهٔ بحرانی می‌شود و در نتیجه هیچ نوری از مادهٔ ۳ عبور نمی‌کند.

●●۶۱- GO در شکل ۲۹-۵۹، نور ابتدا در محیط ۱ شکسته شده و وارد محیط ۲ می‌شود و سپس با زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ فرود می‌آید. ضریب شکست‌ها عبارت‌اند از $n_۱=۱/۶۰$ ، $n_۲=۱/۴۰$ و $n_۳=۱/۲۰$. (الف) زاویهٔ θ چقدر است؟ (ب) اگر θ افزایش یابد، آیا شکست نور به محیط ۳ رخ می‌دهد؟



شکل ۲۹-۵۹ مسئلهٔ ۶۱

حل: (الف) نور تحت زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی محیط ۲ و ۳ برخورد کرده است.



$$\sin\theta_c = \frac{n_۳}{n_۲} = \frac{(۱/۲۰)}{(۱/۴۰)} = ۰/۸۵۷$$

$$\theta_۳ = \theta_c = ۵۹^\circ$$

$$\theta_۲ = ۹۰ - \theta_۳ = ۳۱^\circ$$

$$n_۱\sin\theta = n_۲\sin\theta_۲$$

$$(۱/۶)\sin\theta = (۱/۴۰)\sin ۳۱$$

$$\sin\theta = ۰/۴۵۱ \Rightarrow \theta = ۲۶/۸^\circ$$

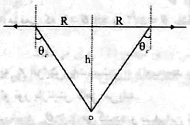
(ب) با افزایش θ ، $\theta_۲$ نیز زیاد می‌شود. با افزایش $\theta_۲$ ، $\theta_۳$ کاهش می‌یابد.

$$\theta_۳ = ۹۰ - \theta_۲$$

با کاهش $\theta_۳$ اشعه وارد محیط (۳) نیز می‌شود.

●●۶۲- GO [redacted] یک گربه ماهی $۲/۰۰m$ زیر سطح یک دریاچهٔ آرام قرار دارد. قطر دایره‌ای روی سطح که ماهی می‌تواند از میان آب دنیای خارج را ببیند چقدر است؟ (ب) اگر ماهی پایین برود آیا قطر دایره کاهش می‌یابد یا افزایش یا تغییر نمی‌کند؟

حل:



(الف) $\qquad$ آب $n = ۱/۳۳$

$$\sin\theta_c = \frac{۱}{n} = ۰/۷۵۲$$

$$\theta_c = ۴۸/۸^\circ$$

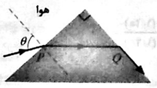
$$\tan\theta_c = \frac{R}{h} \Rightarrow \tan ۴۸/۸ = \frac{R}{۲}$$

$$R = ۲/۲۸m$$

قطر $D = ۲R = ۴/۵۶m$

(ب) چون θ_c ثابت است، اگر ماهی پایین‌تر برود، h زیاد شده و R و D نیز زیاد می‌شوند.

●●۶۳- در شکل ۲۹-۶۰، نوری با زاویهٔ فرود θ از نقطهٔ P وارد منشور مثلثی شکل ۹۰° می‌شود و سپس قسمتی از آن در نقطهٔ Q با زاویهٔ شکست ۹۰° شکسته می‌شود. (الف) ضریب شکست منشور برحسب θ چقدر است؟ (ب) به طور عددی، ضریب شکست چه مقدار بیشینه‌ای را می‌تواند داشته باشد؟ اگر زاویهٔ فرود در Q (پ) کمی افزایش و (ت) کمی کاهش یابد، آیا نور از Q خارج می‌شود؟



شکل ۲۹-۶۰ مسئلهٔ ۶۳

حل:

$\varphi = 90°$

$r_2 = \theta_c$

(الف) $\sin r_2 = \sin\theta_c = \frac{1}{n}$

$r_1 + r_2 = \varphi = 90 \Rightarrow \hat{r}_2 = 90 - \hat{r}_1$

$\sin\hat{r}_2 = \sin(90 - \hat{r}_1) = \cos r_1$

$\cos r_1 = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin r_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}}$

$n = \frac{\sin\theta}{\sin r_1} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}} \Rightarrow \sin^2\theta = n^2\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = n^2 - 1$

$n = \sqrt{1 + \sin^2\theta}$

(ب) بیشینهٔ n موقعی که $\sin\theta = 1$ و $\theta = \pi/2$ باشد.

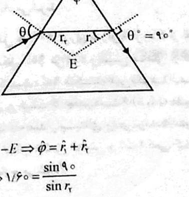
$n_{max} = \sqrt{2}$

(پ) اگر زاویه r_2 افزایش یابد، بیشتر از زاویه حد بر می‌گردد. $r_2 > \theta_c$ و پرتو نور بازتابش کامل می‌یابد.

(ت) اگر کمتر شود. $r_2 > \theta_c$ می‌گردد و بنابراین نور از این سطح می‌شکنند.

●●۶۴- فرض کنید که منشور شکل ۲۹-۵۳ دارای زاویهٔ رأس $\phi = 60.0°$ و ضریب شکست $n = 1.60$ است. (الف) برای اینکه پرتو بتواند از وجه سمت چپ منشور وارد و از وجه سمت راست خارج شود، کمترین زاویهٔ فرود θ باید چقدر باشد؟ (ب) برای چه زاویهٔ فرود θ، مطابق شکل ۲۹-۵۳، پرتو خروجی از منشور دارای زاویهٔ شکست برابر با زاویهٔ θ است.

حل:



(الف) $\hat{\varphi} + \hat{E} = 180$

$\hat{r}_1 + \hat{r}_2 = 180 - E \Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$

$n = \frac{\sin\theta'}{\sin r_2} \Rightarrow 1.60 = \frac{\sin 90}{\sin r_2}$

$\sin r_2 = 0.625 \Rightarrow \hat{r}_2 = 38.7°$

$\hat{r}_1 = \hat{\varphi} - \hat{r}_2 = 60 - 38.7 = 21.3°$

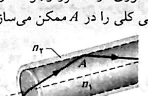
$n = \frac{\sin\theta}{\sin r_1} \Rightarrow (1.60) = \frac{\sin\theta}{\sin 21.3}$

$\sin\theta = 0.581 \Rightarrow \theta = 35.5°$

(ب) $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{\varphi}{2} = 30°$

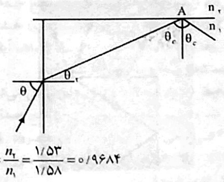
$\sin\theta = (1.6)\sin r = 0.8 \Rightarrow \theta = 53.1°$

●●۶۵- شکل ۲۹-۶۱ یک تار نوری را به صورت ساده نشان می‌دهد: یک مغزی پلاستیکی (n_1=۱/۵۸) که با ورقهٔ پلاستیکی (n_2=۱/۵۳) احاطه شده است. یک پرتو نور با زاویهٔ θ به یک سر آن فرود می‌آید. پرتو در نقطهٔ A بازتاب داخلی کلی پیدا می‌کند، جایی که با مرز مغز- ورقه مواجه می‌شود. (بنابراین، اتلاف نوری در آن مرز وجود ندارد) بیشینهٔ مقدار θ که بازتاب داخلی کلی را در A ممکن می‌سازد، چقدر است؟



شکل ۲۹-۶۱ مسئلهٔ ۶۵

حل:



$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1.53}{1.58} = 0.9684$

$\theta_c = 75.56°$

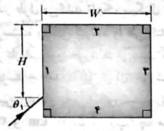
$\theta_2 = 90 - \theta_c = 14.44$

$n\sin\theta = n_1\sin\theta_2 \Rightarrow (1)\sin\theta = (1.58)\sin 14.44$

$\sin\theta = 0.394 \Rightarrow \theta = 23.2°$

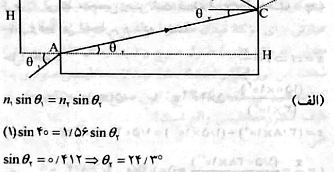
●●۶۶- در شکل ۲۹-۶۲ پرتو نور در هوا با زاویهٔ θ_1 بر یک قطعه پلاستیک شفاف با ضریب شکست ۱/۵۶ فرود می‌آید. ابعاد مشخص شده عبارت‌اند از $H = 2.00$cm و $W = 3.00$cm. نور داخل قطعه حرکت کرده و به یکی از وجه‌ها می‌رسد و در آنجا بازتاب می‌کند (داخل قطعه) و احتمالاً شکست نیز می‌یابد (به سمت خارج داخل هوا). این نقطهٔ *اولین بازتاب* است. سپس نور بازتابیده شده در داخل

قطعه به سمت وجه دیگر می‌رود، نقطهٔ *دومین بازتاب*. اگر $\theta_1 = 40°$ باشد، روی کدام وجه نقطهٔ (الف) اولین بازتاب و (ب) دومین بازتاب واقع است. اگر شکست در نقطهٔ (پ) اولین بازتاب و (ت) دومین بازتاب وجود داشته باشد، زاویهٔ شکست را حساب کنید؛ در صورت عدم شکست پاسخ «هیچ‌کدام» است. اگر $\theta_1 = 70°$ باشد روی کدام وجه نقطهٔ (ث) اولین بازتاب و (ج) دومین بازتاب واقع است. اگر شکست در نقطهٔ (چ) اولین بازتاب و (ح) دومین بازتاب وجود داشته باشد، زاویهٔ شکست را حساب کنید؛ در صورت عدم شکست پاسخ «هیچ‌کدام» است.



شکل ۲۹-۶۲ مسئلهٔ ۶۶

حل:



(الف) $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$

$(1)\sin 40 = 1.56\sin\theta_2$

$\sin\theta_2 = 0.412 \Rightarrow \theta_2 = 24.3°$

$\varphi = 90 - \theta_2 = 65.7°$

زاویهٔ حد برای این پلاستیک برابر است با:

$\sin\theta_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.56} = 0.641 \Rightarrow \theta_c = 39°$

اشعه در نقطه‌ای مانند B به سطح برخورد می‌کند.

$\sin\theta_c = \frac{oB}{oA} \Rightarrow \tan 65.7 = \frac{oB}{2}$

$oB = 4.43\text{cm} > W$

یعنی نور قبل از برخورد به وجه (۲) به وجه (۳) برخورد می‌کند. محل نقطهٔ C از این رابطه بدست می‌آید:

$\tan\theta_2 = \frac{CH}{W} \Rightarrow \tan 24.3 = \frac{CH}{3}$

$CH = 1.35$ cm

$EC = H - CH = 2 - 1.35 = 0.65\text{cm}$

(ب) قسمتی از پرتو در سطح ۳ می‌شکند و با زاویهٔ θ_1 خارج می‌شود و قسمتی از پرتو بازتابش می‌یابد و به نقطهٔ D می‌رسد. در نقطهٔ D، پرتو با زاویهٔ φ به سطح (۲) برخورد می‌کند و چون $\varphi > \theta_c$ است بازتابش کلی می‌یابد.

(پ) و (ت) در اولین بازتابش یعنی در نقطهٔ C شکست نیز وجود دارد، اما در سطح (۲) بازتابش کلی روی می‌دهد.

(ث) اگر $\theta_1 = 70°$ باشد.

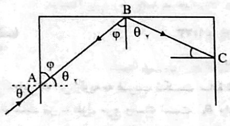
$(1)\sin 70 = (1.56)\sin\theta_2$

$\sin\theta_2 = 0.602 \Rightarrow \theta_2 = 37°$

$\varphi = 90 - 37 = 53°$

$\tan\varphi = \frac{pB}{2} \Rightarrow 2\tan 53 = 2.65\text{cm} < W$

نور مطابق شکل با زاویهٔ φ به نقطهٔ B روی سطح (۲) برخورد می‌کند.

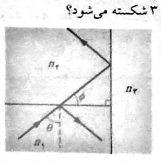


اولین بازتابش روی سطح (۲) روی می‌دهد.

(ج) دومین نقطهٔ بازتابش در نقطهٔ C روی سطح ۳ روی می‌دهد.

(چ) و (ح) در اولین بازتابش (B) شکست وجود ندارد. در سطح ۳ (نقطهٔ C) شکست وجود دارد. زاویهٔ شکست برابر $\theta_1 = 70°$ می‌باشد.

●●۶۷- در شکل ۲۹-۶۳ که در آن، زاویه‌ها بدون مقیاس رسم شده‌اند، پرتو با زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی میان محیط ۲ و ۳ فرود می‌آید. زاویهٔ $\phi = 60.0°$ و دو ضریب شکست عبارت‌اند از n_1=۱/۷۰ و n_2=۱/۶۰ است. مطلوب است (الف) ضریب شکست n_3 و (ب) زاویهٔ θ. (پ) اگر θ افزایش یابد آیا نور به داخل محیط ۳ شکسته می‌شود؟



شکل ۲۹-۶۳ مسئلهٔ ۶۷

حل: (الف) زاویهٔ ϕ با زاویهٔ θ_c برابر است. پس:

$\theta_c = 60°$

$\sin\theta_c = \frac{n_3}{n_2} \Rightarrow n_3 = n_2 \sin\theta_c$

$n_3 = (1.60)\sin 60 = 1.39$

(ب) $\theta_2 = 90 - \phi = 30°$

$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_2$

$(1.70)\sin\theta = (1.60)\sin 30°$

$\sin\theta = 0.471 \Rightarrow \theta = 28.1°$

(پ) اگر θ کاهش یابد، ϕ زیاد می‌شود و با افزایش ϕ زاویهٔ برخورد با سطح (۳) بیشتر از زاویهٔ بحرانی شده و اشعه وارد محیط (۳) نمی‌شود.

بخش ۲۹-۱۰ قطبش به وسیله‌ی بازتاب

●۶۸- **SSM** (الف) در چه زاویهٔ فرودی نور بازتابیده از آب کاملاً قطبیده است؟ (ب) آیا این زاویه به طول موج نور بستگی دارد؟

حل: (الف) $n = \tan\theta_b = 1.33$

$\theta_b = 53°$

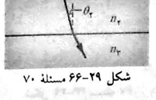
(ب) از آنجایی که این زاویه به ضریب شکست مادهٔ شفاف و ضریب شکست نیز به طول موج وابسته است. θ_b وابسته به طول موج می‌باشد.

●۶۹- نوری که در آب با ضریب شکست ۱/۳۳ حرکت می‌کند به یک صفحهٔ شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۵۳ فرود می‌آید. در چه زاویهٔ فرودی نور بازتابیده قطبیدهٔ کامل است؟

حل: $\tan\theta_b = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1.53}{1.33} = 1.15$

$\theta_b = 49°$

●۷۰- در شکل ۲۹-۶۴، یک پرتو نور در هوا روی لایهٔ تخت محیط ۲ با ضریب شکست $n_2=1.5$ فرود می‌آید. زیر محیط ۲، محیط ۳ با ضریب شکست n_3 قرار دارد. پرتو روی سطح جدایی هوا- محیط ۲ با زاویهٔ بروستر فرود می‌آید. پرتو نور اتفاقاً با زاویهٔ بروستر روی سطح جدایی میان دو محیط ۲ و ۳ شکسته و وارد محیط ۳ می‌شود. مقدار n_3 چقدر است؟



شکل ۲۹-۶۶ مسئلهٔ ۷۰

حل:

$\tan\theta_{b,1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{(1.5)}{(1)} = 1.5$

$\theta_{b,1} = 56.3°$

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$(1)\sin 56.3 = (1.5)\sin\theta_2$

$\sin\theta_2 = 0.555 \Rightarrow \theta_2 = 33.7°$

$\tan\theta_2 = \tan\theta_{2,b} = \frac{n_3}{n_2}$

$\tan 33.7 = \frac{n_3}{1.5} \Rightarrow n_3 = 1$ هوا

مسئله‌های اضافی

۷۱- (الف) چقدر طول می‌کشد تا یک سیگنال رادیویی فاصلهٔ ۱۵۰km میان فرستنده و آنتن گیرنده را طی کند؟ (ب) ما ماه کامل را به خاطر بازتاب نور خورشید می‌بینیم. قبل از اینکه این نور به چشم ما برسد چه مدت قبل از آن خورشید را ترک کرده است؟ فاصلهٔ زمین - ماه و زمین- خورشید به ترتیب عبارت‌اند از 3.8×10^5 km و 1.5×10^8 km . (پ) چه مدت برای زمان رفت و برگشت طول می‌کشد تا نور بین زمین و ماهوارهٔ فضایی به فاصلهٔ 1.3×10^9 km را طی کند؟ (ت) بر این باورند که سحابی خرچنگ که حدوداً در فاصلهٔ ۶۵۰۰ سال نوری (ly) قرار دارد، نتیجهٔ انفجار یک ابرنواختر است که ۱۰۵۴ سال پس از میلاد توسط منجمین چینی ثبت شده است. در حدود چه سالی واقعاً این انفجار رخ داده است؟

حل: (الف) $x = ct \Rightarrow t = \frac{x}{c}$

$t = \frac{(150\times10^3)}{(3\times10^8)} = 5\times10^{-4}$ s یا 0.5(ms)

(ب) $x = (3.8\times10^8) + (1.5\times10^{11}) = 1.5038\times10^{11}$ m

$t = \frac{x}{c} = \frac{(1.5038\times10^{11})}{(3\times10^8)} = 501.27$s یا $8.4'$

(پ) $x = 2.6\times10^{12}$ m

$t = \frac{(2.6\times10^{12})}{(3\times10^8)} = 8.67\times10^3$ s یا 2.4h

(ت) هر سال نوری، مسافتی است که نور در یک سال طی می‌کند.

$1ly = 9.33\times10^{15}$ m

این انفجار در ۶۵۰۰ سال قبل روی داده است.

$1054 - 6500 = -5446\,B\cdot C$

BC یعنی قبل از میلاد مسیح (ع)

●●۷۲- یک موج الکترومغناطیسی با بسامد 4.00×10^{14} Hz در خلأ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. میدان الکتریکی آن دارای دامنهٔ E_m و جهت آن موازی با محور y است. در زمان $t=0$ ، میدان الکتریکی در نقطهٔ P روی محور x دارای مقدار $+E_m/4$ و با زمان کاهش می‌یابد. فاصلهٔ نقطهٔ P در امتداد محور x تا اولین نقطه با $E=0$ چقدر است، در صورتی که بررسی را در (الف) جهت منفی و (ب) جهت مثبت محور x انجام دهیم؟

حل: (الف)

$\omega = 2\pi f = (2\pi)(4\times10^{14}) = 2.51\times10^{15}$ rad/s

$E = E_m \sin\omega t$

$\frac{E_m}{4} = E_m \sin\omega t = \frac{1}{4} = \sin 14.5° = \sin 0.253$

که در آن زاویهٔ به جای درجه برحسب رادیان بیان شده است.

$(2.51\times10^{15})t = 0.253 \Rightarrow t = 1\times10^{-16}$ s

مسافتی که در این مدت در امتداد محور x طی کرده است.

$x = ct = (3\times10^8)(1\times10^{-16})3\times10^{-8}$ m

(ب) جایی که قبل از $t=0$, $E = \frac{E}{4}$ بوده است.

$\sin\omega t = \sin(\pi - 0.253) = \sin 2.887$

$\omega t = 2.887 \Rightarrow t = \frac{2.887}{2.51\times10^{15}} = 1.15\times10^{-7}$ m

۷۳- مؤلفهٔ الکتریکی یک باریکهٔ نور قطبیده عبارت است از $E_y = (5.00\text{V/m})\sin[1.00\times10^6\ \text{m}^{-1})z + \omega t]$. (الف) عبارتی برای مؤلفهٔ میدان مغناطیسی موج بنویسید که شامل مقدار ω باشد. (ب) طول موج و (پ) زمان تناوب و (ت) شدت این نور چقدر است؟ (ث) میدان مغناطیسی موازی با کدام محور نوسان می‌کند؟ (ج) این موج در چه ناحیه‌ای از طیف الکترومغناطیسی واقع است؟

حل:

$B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{5}{3\times10^8} = 1.67\times10^{-8}$

(الف) $V = \frac{\omega}{k} \Rightarrow 3\times10^8 = \frac{\omega}{1\times10^6}$

$\omega = 3\times10^{14}$ rad/s

$B_x = 1.67\times10^{-8} \sin(1\times10^6 z + 3\times10^{14} t)$

(ب) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{(2\pi)}{(1\times10^6)} = 6.28\times10^{-6}$ m

(پ)

$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

$T = \frac{(2)(3.14)}{3\times10^{14}} = 2.09\times10^{-14}$ s

(ت)

$I = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{(5)^2}{(2)(4\pi\times10^{-7})(3\times10^8)} = 3.32\times10^{-2}$ W/m^2

(ث) موازی محور x ها

(ج) با توجه به مقدار طول موج، در ناحیه فروسرخ قرار دارد.

۷۴- ذره‌ای در منظومهٔ شمسی تحت تاثیر ترکیب جاذبهٔ گرانشی خورشید و نیروی تابشی به خاطر پرتوهای خورشیدی قرار دارد. فرض کنید این ذره کروی با چگالی 1×10^3 kg/m^3 است و همهٔ شدت نور را جذب می‌کند. (الف) نشان دهید که، اگر شعاع آن کمتر از یک شعاع بحرانی R باشد، به سمت خارج منظومهٔ شمسی رانده می‌شود. (ب) شعاع بحرانی را محاسبه کنید.

حل: (الف) و (ب) نیروی گرانشی که از طرف خورشید بر آن وارد می‌شود برابر است با:

$F_g = G\frac{M_s m}{r^2} = G\frac{M_s}{r^2}\rho\frac{4}{3}\pi R^3$

که r فاصله جرم از مرکز خورشید است.

شدت نور خورشید در محل کره برابر است با:

$I = \frac{P_0}{4\pi r^2}$

که P_0 توان تابشی خورشید است.

$F_r = \frac{IA}{C} = \frac{\pi R^2 P_0}{C 4\pi r^2}$

اگر نیروی گرانشی کمتر از F_r باشد، کره به بیرون منظومه شمسی فرستاده می‌شود.

$F_r \geq F_g \Rightarrow \frac{\pi R^2 P_0}{4\pi r^2} \geq G\frac{M_s}{r^2} P \frac{4\pi}{3} R^3$

$\frac{3P_0}{16\pi G M_s \rho} \geq R$

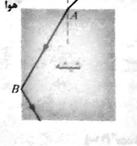
حالت تساوی شعاع بحرانی را به دست می‌دهد.

$R_c = \frac{(3)(3.9\times10^{26})}{(16)(3.14)(3\times10^8)(6.67\times10^{-11})(1.99\times10^{30})(1\times10^3)}$

$R_c = 5.84\times10^{-7}$ m

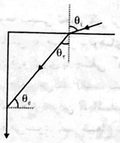
(مقادیر بالا از پیوست انتهای کتاب به دست آمده است.)

۷۵- **SSM** در شکل ۲۹-۶۵، پرتو نور با زاویهٔ $\theta_1 = 40°$ از نقطهٔ A وارد یک قطعه شیشه می‌شود و سپس در نقطهٔ B بازتاب داخلی کلی می‌یابد. با این اطلاعات می‌توان ضریب شکست شیشه را حساب کرد، کمینهٔ مقدار آن چقدر است؟



شکل ۲۹-۶۵ مسئلهٔ ۷۵

حل: فرض می‌شود در نقطهٔ B تحت زاویهٔ بحرانی به سطح جدایی برخورد کرده است.



$$\sin\theta_c = \frac{1}{n}$$

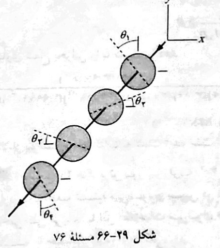
$$\theta_2 = 90 - \theta_c$$

$$n = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\sin 45}{\sin(90-\theta_c)} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos\theta_c}$$

$$\frac{1}{\sin\theta_c} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta_c \Rightarrow \tan\theta_c = \sqrt{2} \Rightarrow \theta_c = 54.7^\circ$$

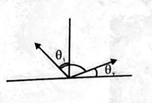
$$n = \frac{1}{\sin 54.7} = 1.22$$

۷۶- GO در شکل ۲۹-۶۶، نور ناقطبیده‌ای با شدت $25\ W/m^2$ وارد سامانه‌ای شامل چهار ورقهٔ قطبنده می‌شود، که جهت قطبیدگی ورقه‌های آن عبارت‌اند از $\theta_1 = 40^\circ$ ، $\theta_2 = 20^\circ$ ، $\theta_3 = 20^\circ$ و $\theta_4 = 30^\circ$. شدت نور خروجی از این سامانه چقدر است؟



شکل ۲۹-۶۶ مسئلهٔ ۷۶

حل:



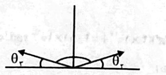
$$I_1 = \frac{I_0}{2} = 12.5\ w/m^2$$

$$I_2 = I_1\cos^2(\theta_1 + 90 - \theta_2) = (12.5)\cos^2(110)$$

$$= 1.462\ w/m^2$$

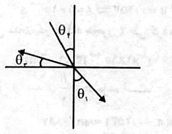
$$I_3 = I_2\cos^2(180 - \theta_2 - \theta_3) = (1.462)\cos^2 40$$

$$I_3 = 0.858\ w/m^2$$



$$I_4 = I_3\cos^2(90 - \theta_4 - \theta_3) = (0.858)\cos^2 40$$

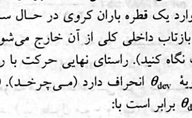
$$= 0.503\ w/m^2$$



۷۷- [redacted] *رنگین کمان.* شکل ۲۹-۶۷ پرتو نوری را نشان می‌دهد که وارد یک قطره باران کروی در حال سقوط شده و پس از یک بازتاب داخلی کلی از آن خارج می‌شود (به شکل ۲۹-۲۱ الف نگاه کنید). راستای نهایی حرکت با راستای اولیهٔ به اندازهٔ زاویهٔ θ_{dev} انحراف دارد (می‌چرخد). (الف) نشان دهید که θ_{dev} برابر است با:

$$\theta_{dev} = 180^\circ + 2\theta_i - 4\theta_r$$

که در آن θ_i زاویهٔ فرود پرتو روی قطره و θ_r زاویهٔ شکست پرتو در قطره است. (ب) با به کار بردن قانون اسنل، برای θ_r بر حسب θ_i و ضریب شکست n آب قرار دهید. سپس با ماشین حسابی که رسم منحنی دارد یا با رایانه، θ_{dev} را برحسب θ_i در ناحیهٔ ممکن برای مقدارهای θ_i ، $n = 1.331$ برای نور قرمز و $n = 1.333$ برای نور آبی، رسم کنید.



شکل ۲۹-۶۷ مسئلهٔ ۷۷

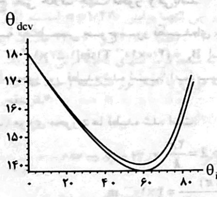
منحنی نور قرمز و منحنی نور آبی دارای کمینه‌های متفاوتی هستند که بدان معناست که زاویهٔ *کمینهٔ انحراف* متفاوتی برای هر رنگ وجود دارد. نور هر رنگ داده شده که قطره را ترک می‌کند در آن زاویهٔ انحراف کمینهٔ رنگ، به خصوص درخشان است چون پرتوها در آن زاویه جمع می‌شوند. بنابراین، نور قرمز درخشان قطره را در یک زاویه و نور آبی درخشان در زاویه دیگری قطره را ترک می‌کنند.

زاویهٔ کمینهٔ انحراف را از منحنی θ_{dev} برای (پ) نور قرمز و (ت) نور آبی حساب کنید. (ث) اگر این رنگ‌ها لبهٔ داخلی و خارجی رنگین کمان را تشکیل دهند (شکل ۲۹-۲۱ الف)، پهنای زاویه‌ای رنگین کمان چقدر است؟

حل: (الف) اولین سهم در انحراف ناشی از اولین شکست است و داریم: $\delta\theta_1 = \theta_i - \theta_r$. سهم بعدی در انحراف کل ناشی از بازتابش است. توجه کنید که زاویهٔ میان پرتو نور پیش از بازتابش و خط عمود بر سطح عقبی کره برابر با θ_r است و با استفاده از قانون بازتابش نتیجه می‌گیریم زاویه‌ای که با آن پرتو باز می‌گردد (در مقایسه با جهت تابش پیش و پس از بازتابش) برابر $\delta\theta_2 = 180^\circ - 2\theta_r$ می‌شود. سهم نهایی در انحراف ناشی از شکست نور در حال خروج از کره است و دوباره داریم: $\delta\theta_3 = \theta_i - \theta_r$. بنابراین زاویهٔ انحراف کل چنین می‌شود

$$\theta_{dev} = \delta\theta_1 + \delta\theta_2 + \delta\theta_3 = 180^\circ + 2\theta_i - 4\theta_r$$

(ب) $\theta_1 = \sin^{-1}\left(1/n\sin\theta_i\right)$ را در رابطه‌ای که در قسمت (الف) به دست آوردیم اثر می‌دهیم. منحنی بالایی در شکل زیر مربوط به نور آبی و منحنی پایینی مربوط به نور قرمز است.



(پ) از روی شکل بالا در می‌یابیم که مقدار کمینهٔ θ_{dev} برای نور قرمز تقریباً 137.63° است که این در $\theta_i = 59.52^\circ$ رخ می‌دهد.

(ت) برای نور آبی از روی شکل درمی‌یابیم که مقدار کمینهٔ θ_{dev} تقریباً 139.35° است که این در $\theta_i = 59.52^\circ$ رخ می‌دهد.

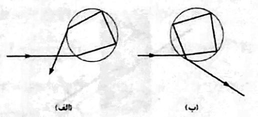
(ث) اختلاف در θ_{dev} در دو قسمت قبل برابر 1.72° می‌شود.

۷۸- [redacted] *رنگین کمان اولیه* که در مسئلهٔ ۷۷ شرح داده شد یک نوع معمول است که در ناحیه‌هایی که رنگین کمان ظاهر می‌گردد دیده می‌شود. این رنگین کمان با یک بار شکست داخل قطره ایجاد می‌شود. نوع نادرتر *رنگین کمان نوع ثانویه* است که در بخش ۲۹-۸ شرح داده شد و با دو بار شکست داخل قطره (شکل ۲۹-۶۸ الف) ایجاد می‌شود. (الف) نشان دهید که انحراف زاویه‌ای نوری که وارد قطرهٔ آب کروی شده و سپس خارج می‌شود برابر است با

$$\theta_{dev} = (180^\circ)k + 2\theta_i - 2(k+1)\theta_r$$

که در آن k تعداد بازتاب‌های داخلی است. روش مسئلهٔ ۷۱ را به کار برید و زاویهٔ کمینهٔ انحراف را برای (ب) نور قرمز و (پ) نور آبی در رنگین کمان ثانوی به دست آورید. (ت) پهنای زاویه‌ای این رنگین کمان (شکل ۲۹-۲۱ ت) چقدر است؟

رنگین کمان سوم بستگی به سه بازتاب داخلی (شکل ۲۹-۶۸ ب) دارد. این امر احتمالاً رخ می‌دهد، اما همان‌طور که در بخش ۲۹-۸ اشاره شد نمی‌توان آن را دید چون خیلی کم سو است و در آسمان درخشان اطراف خورشید واقع است. زاویهٔ کمینهٔ انحراف را برای (ث) نور قرمز و (ج) نور آبی در این رنگین کمان به دست آورید (ح) پهنای زاویه‌ای این رنگین کمان چقدر است؟



شکل ۲۹-۶۸ مسئلهٔ ۷۸

حل: (الف) اولین سهم در انحراف کل ناشی از اولین شکست است: $\delta\theta_1 = \theta_i - \theta_r$. دومین سهم‌های بعد ناشی از بازتابش هستند. توجه کنید زاویهٔ میان پرتو نور پیش از بازتابش و خط عمود به سطح پشتی کره برابر با θ_r است و با استفاده از قانون اسنل نتیجه می‌گیریم زاویه‌ای که با آن پرتو باز می‌گردد (در مقایسه با جهت تابش پیش و پس از هر بازتابش) برابر با $\delta\theta_r = 180^\circ - 2\theta_r$ است. بنابراین برای k بازتاب، $\delta\theta_2 = k\theta_r$ می‌شود. آخرین سهم ناشی از شکست نور در هنگام ترک از کره است و دوباره داریم: $\delta\theta_3 = \theta_i - \theta_r$. بنابراین زاویهٔ انحراف کل چنین می‌شود

$$\theta_{dev} = \delta\theta_1 + \delta\theta_2 + \delta\theta_3 = 2(\theta_i - \theta_r) + k(180^\circ - 2\theta_r)$$
$$= k(180^\circ) + 2\theta_i - 2(k+1)\theta_r$$

(ب) به ازای $k = 2$ و $n = 1.331$ (در مسئله ۶۷ داده شده است) به طور عددی زاویهٔ رنگین کمان مرتبهٔ دوم را به دست می‌آوریم. در می‌یابیم که کمینهٔ θ_{dev} برای نور قرمز برابر با 317.5° است و در $\theta_i = 76.88^\circ$ رخ می‌دهد.

(پ) به همان ترتیب در می‌یابیم که کمینهٔ θ_{dev} برای نور آبی (که برای آن $n = 1.343$ است) برابر با 233.48° است و این در $\theta_i = 71.52^\circ$ رخ می‌دهد.

(ت) اختلاف در θ_{dev} دو قسمت قبل تقریباً برابر 3.1° است.

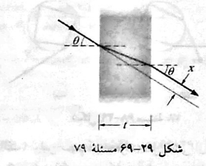
(ث) با قراردادن $k = 3$ ، به طور عددی زاویهٔ میانگین مرتبهٔ سوم را به دست می‌آوریم. در می‌یابیم که کمینهٔ θ_{dev} برای نور قرمز برابر 317.5° است و این در $\theta_i = 76.88^\circ$ رخ می‌دهد.

(ج) به همان ترتیب برای کمینهٔ θ_{dev} برای نور آبی $۳۲۱/۹^\circ$ را می‌یابیم که این در $\theta_i = ۷۶/۶۲^\circ$ رخ می‌دهد.
(چ) اختلاف در θ_{dev} دو قسمت قبل برابر $۴/۴^\circ$ می‌شود.

۷۹- SSM (الف) ثابت کنید که یک پرتو نور که روی سطح یک تیغهٔ تخت شیشه‌ای به ضخامت t می‌تابد، مطابق شکل ۲۹-۷۱ از وجه دیگر موازی راستای اولیه ولی جابه‌جا شده به یک طرف خارج می‌شود. (ب) نشان دهید که برای زاویه‌های کوچک فرود، این جابه‌جایی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

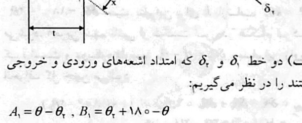
$$x = t\theta\frac{n-۱}{n}$$

که در آن n ضریب شکست شیشه است و θ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۲۹-۶۹ مسئلهٔ ۷۹

حل:



(الف) دو خط δ_1 و δ_2 که امتداد اشعه‌های ورودی و خروجی هستند را در نظر می‌گیریم:

$$A_1 = \theta - \theta_2 \ , \ B_1 = \theta_2 + ۱۸۰ - \theta$$

$$A_1 + B_1 = (\theta - \theta_2) + (\theta_2 + ۱۸۰ - \theta) = ۱۸۰$$

دو خط δ_1 و δ_2 و AB که آنها را قطع می‌کند در نظر می‌گیریم. چون زوایای داخلی مکمل یکدیگرند، δ_1 و δ_2 موازی هستند.
(ب) در مثلث AHB داریم:

$$AH = AB\cos\theta_2 \Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos\theta_2} = \frac{t}{\cos\theta_2} \qquad (۱)$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow (۱)\sin\theta = n\sin\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\sin\theta}{n} \qquad (۲)$$

از مثلث ABD داریم:

$$x = BD = AB\sin(\theta - \theta_2) = \frac{t}{\cos\theta_2}\sin(\theta - \theta_2) \qquad (۳)$$

برای زوایای کوچک:

$$\sin x \simeq x \ , \ \cos x \simeq ۱$$

$$(۲) \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta}{n}$$

$$(۳) \Rightarrow x = \frac{t(\theta - \theta_2)}{۱} = t\left(\theta - \frac{\theta}{n}\right)$$

$$x = t\theta\left(۱ - \frac{۱}{n}\right) = t\theta\frac{n-۱}{n}$$

۸۰- یک موج الکترومغناطیسی در جهت منفی محور y حرکت می‌کند. در یک وضعیت و زمان مشخص، میدان الکتریکی در امتداد مثبت محور z و دارای بزرگی ۱۰۰V/m است. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت میدان مغناطیسی متناظر.

حل: (الف) $B = \frac{E}{C} = \frac{۱۰۰}{۳\times۱۰^۸} = ۳/۳۳\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{T}$

(ب) **این میدان در خلاف محور x ها ارتعاش می‌نماید. جهت $\vec{B}$ از تعریف بردار پواین‌تینگ به دست می‌آید. $\vec{S}$ جهت انتشار موج یعنی خلاف جهت محور y می‌باشد.**

۸۱- مؤلفهٔ مغناطیسی موج نور قطبیده‌ای برابر با $B_x = (۴/۰\times۱۰^{-۶}\ \mathrm{T})\sin[۱/۵۷\times۱۰^۷\ \mathrm{m}^{-۱})y + \omega t]$ است. (الف) موازی کدام محور نور قطبیده شده است؟ (ب) بسامد و (پ) شدت نور چقدرند؟
حل: (الف) موازی محور z ها قطبیده شده است.

(ب)
$$k = \frac{۲\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{۲\pi}{k}$$

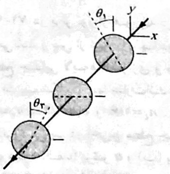
$$\lambda = \frac{(۲\pi)}{(۱/۵۷\times۱۰^۷)} = ۴\times۱۰^{-۷}\ \mathrm{m}$$

$$\lambda = \frac{C}{f} \Rightarrow f = \frac{C}{\lambda} = \frac{(۳\times۱۰^۸)}{(۴\times۱۰^{-۷})} = ۷/۵\times۱۰^{۱۴}\ \mathrm{Hz}$$

(پ)

$$I = \frac{CB_m^۲}{۲\mu_۰} = \frac{(۳\times۱۰^۸)(۴\times۱۰^{-۶})^۲}{(۲)(۴\pi\times۱۰^{-۷})} = ۱/۹۱\times۱۰^۳\ \mathrm{W/m^۲}$$

۸۲- در شکل ۲۹-۷۰، نور ناقطبیده‌ای به سامانه‌ای با سه ورقهٔ قطبنده می‌تابد، که جهت‌های قطبیدگی اولی و سومی در زاویه‌های $\theta_1 = ۳۰^\circ$ (پاد ساعتگرد) و $\theta_3 = ۳۰^\circ$ (ساعتگرد) هستند. چه کسری از شدت نور اولیه از این سامانه خارج می‌شود.



شکل ۲۹-۷۰ مسئلهٔ ۸۲

حل: نور فرودی ناقطبیده است و در نتیجه شدت پرتو فرودی نصف می‌شود. آنگاه با دو بار به کار بردن معادله ۲۹-۴۲ به سادگی خواهیم داشت

$$I = \frac{۱}{۲}I_۰\cos^۲\theta'_1\cos^۲\theta'_2$$

که در آن $\theta'_1 = ۹۰^\circ - \theta_1 = ۶۰^\circ$ و $\theta'_2 = ۹۰^\circ - \theta_2 = ۶۰^\circ$ است. در نتیجه $I/I_۰ = ۰/۰۳۱$ می‌شود.

۸۳- پرتو نور سفید که در کوارتز گداخته حرکت می‌کند با زاویهٔ θ_1 به سطح جدایی کوارتز- هوا فرود می‌آید. فرض کنید که ضریب شکست کوارتز در قرمز انتهای ناحیهٔ مرئی برابر ۱/۴۵۶ و در آبی انتها برابر $n = ۱/۴۷۰$ است. اگر θ_1 برابر (الف) $۴۲/۰۰^\circ$، (ب) $۴۳/۱۰^\circ$ و $۴۴/۰۰^\circ$ باشد، آیا در نور سفید شکسته شده، قرمز انتهای ناحیهٔ مرئی غالب است یا آبی انتهای ناحیهٔ مرئی، یا اصلاً نور شکسته وجود ندارد؟

حل:
$$\sin\theta_c = \frac{۱}{n}$$

برای نور قرمز
$$\sin\theta_c = \frac{۱}{۱/۴۵۶} = ۰/۶۸۷ \Rightarrow \theta_c = ۴۳/۴^\circ$$

برای نور آبی
$$\sin\theta_c = \frac{۱}{۱/۴۷۰} = ۰/۶۸۰ \Rightarrow \theta_c = ۴۲/۸^\circ$$

(الف)
$$\theta_1 = ۴۲^\circ$$

تمام نور عبور می‌کند و نور عبوری به رنگ سفید است.

(ب)
$$\theta_2 = ۴۳/۱^\circ$$

که قسمت مربوط به نور قرمز شکسته می‌شود ولی قسمت مربوط به نور آبی شکسته نمی‌گردد. بنابراین نور خارج‌شده به رنگ قرمز می‌باشد.

(پ)
$$\theta_1 = ۴۴^\circ$$

هیچ نوری عبور نمی‌نماید. $(\theta_1 > \theta_2)$

۸۴- سه ورقهٔ قطبنده سامانه‌ای را تشکیل می‌دهند. اولی و سومی چلیپایی‌اند: جهت قطبیدگی میانی با جهت قطبیدگی دوتای دیگر زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. چه کسری از شدت باریکهٔ نور ناقطبیدهٔ اولیه از این سامانه می‌گذرد؟

حل:
$$I_1 = \frac{I_۰}{۲}$$

$$I_2 = I_1\cos^۲\theta = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲ ۴۵ = \frac{I_۰}{۴}$$

$$I_3 = I_2\cos^۲\theta = \frac{I_۰}{۴}\cos^۲ ۴۵^\circ = \frac{I_۰}{۸}$$

$$\frac{I_3}{I_۰} = \frac{۱}{۸} = ۰/۱۲۵ \quad \text{یا} \quad ٪۱۲۵$$

۸۵- در ناحیه‌ای از فضا که نیروی گرانشی قابل چشم‌پوشی است، کره‌ای به وسیلهٔ یک باریکهٔ نوری یکنواخت با شدت ۶/۰mW/m^۲ شتاب می‌گیرد. کره کاملاً جذب کننده و دارای شعاع ۲/۰μm و چگالی یکنواخت ۵/۰×۱۰^۳ kg/m^۳ است. بزرگی شتاب کره بر اثر نور چقدر است؟
حل: سطح مقطع مقابل نور برابر است با:

$$A = \pi R^۲ = (۳/۱۴)(۲\times۱۰^{-۶}) = ۱/۲۵۶\times۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{m^۲}$$

$$F = \frac{I}{c}A = \frac{(۶\times۱۰^{-۳})}{(۳\times۱۰^۸)}(۱/۲۵۶\times۱۰^{-۱۱}) = ۲/۵۱۲\times۱۰^{-۲۲}\ \mathrm{N}$$

$$m = \rho V = (۵\times۱۰^۳)(۴/۳)(۳/۱۴)(۲\times۱۰^{-۶})^۳$$
$$= ۱/۶۷\times۱۰^{-۱۳}\ \mathrm{kg}$$

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{(۲/۵۱۲\times۱۰^{-۲۲})}{(۱/۶۷\times۱۰^{-۱۳})}$$
$$= ۱/۵\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{m/s^۲}$$

۸۶- یک باریکهٔ ناقطبیدهٔ نور به سامانه‌ای شامل چهار ورقهٔ قطبنده می‌تابد، ورقه‌ها به گونه‌ای سمتگیری کرده‌اند که زاویهٔ میان جهت‌های قطبندهٔ هر دو ورقهٔ مجاور ۳۰° است. چه کسری از شدت اولیه از این سامانه عبور می‌کند؟

حل:
$$I_1 = \frac{I_۰}{۲}$$

$$I_2 = I_1\cos^۲\theta = \frac{I_۰}{۲}\cos^۲\theta$$

$$I_3 = I_2\cos^۲\theta = \frac{I_۰}{۲}\cos^۴\theta$$

$$\frac{I_4}{I_۰} = \frac{۱}{۲}\cos^۶ ۳۰ = ۰/۲۱ \quad \text{یا} \quad ٪۲۱$$

۸۷- SSM در یک آزمون، دستگاه رادار نظامی ناتو که با توان ۱۸۰k W در ۱۲GHz کار می‌کند اقدام به آشکارسازی یک هواپیمای استیلت در فاصلهٔ ۹۰km می‌کند. فرض کنید که باریکهٔ رادار به طور یکنواخت در یک نیمکره گسیل می‌شود. (الف) شدت باریکه وقتی به محل هواپیما می‌رسد چقدر است؟ هواپیما موج‌های رادار را بازتاب می‌دهد به طوری که گویی سطح مقطع آن فقط ۰/۲۲m^۲ است. (ب) توان بازتاب هواپیما چقدر است؟ فرض کنید که باریکه به طور یکنواخت در یک نیمکره بازتابیده شده است. در برگشت باریکه به پایگاه رادار (پ) شدت، (ت) بیشینهٔ مقدار بردار میدان الکتریکی و (ث)

جذر میانگین مربعی بیشینهٔ میدان مغناطیسی باریکهٔ رادار بازتابیده چقدر است؟

حل: (الف)

$$I=\frac{P}{A}=\frac{P}{۲\pi R^{۲}}=\frac{(۱۸۰\times ۱۰^{۳})}{(۲\pi)(۹۰\times ۱۰^{۳})^{۲}}=۳/۵\times ۱۰^{-۶}\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

(ب)

$$P=IA_{a}=(۳/۵\times ۱۰^{-۶})(۰/۲۲)=۷/۷\times ۱۰^{-۷}$$

(پ)

$$I=\frac{P}{۴\pi R^{۲}}=\frac{(۷/۷\times ۱۰^{-۷})}{(۲\pi)(۹۰\times ۱۰^{۳})^{۲}}=۱/۵\times ۱۰^{-۱۷}\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

(ت)

$$I=\frac{E_m^{۲}}{۲\mu_{۰}c}\Rightarrow (۱/۵\times ۱۰^{-۱۷})=\frac{E_m^{۲}}{(۲)(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۳\times ۱۰^{۸})}$$

$$E_m=۱/۱\times ۱۰^{-۷}\ \mathrm{V/m}$$

(ث)

$$B_m=\frac{E_m}{c}=\frac{۱/۱\times ۱۰^{-۷}}{۳\times ۱۰^{۸}}=۳/۶۷\times ۱۰^{-۱۶}\ \mathrm{T}$$

$$B_{rms}=\frac{B_m}{\sqrt{۲}}=۲/۵\times ۱۰^{-۱۶}\ \mathrm{T}$$

۸۸- مؤلفهٔ مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی در خلأ دارای دامنهٔ $۸۵/۸\mathrm{nT}$ و عدد موج زاویه‌ای $۴/۰۰\mathrm{m^{-۱}}$ است. (الف) بسامد موج، (ب) مقدار rms مؤلفهٔ الکتریکی و (پ) شدت نور چقدرند؟

حل: (الف)

$$k=\frac{۲\pi}{\lambda}\Rightarrow \lambda=\frac{۲\pi}{k}=\frac{۲\pi}{۴}=۱/۵۷\ \mathrm{m}$$

$$\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow f=\frac{c}{\lambda}=\frac{۳\times ۱۰^{۸}}{۱/۵۷}=۱/۹۱\times ۱۰^{۸}\ \mathrm{Hz}$$

(ب)

$$E_m=cB_m=(۳\times ۱۰^{۸})(۸۵/۸\times ۱۰^{-۹})=۲۵/۷\ \mathrm{V/m}$$

(پ)

$$I=\frac{E_m^{۲}}{۲\mu_{۰}c}=\frac{(۲۵/۷)^{۲}}{۲(۴\pi\times ۱۰^{-۷})(۳\times ۱۰^{۸})}$$

$$=۰/۸۸\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

۸۹- مطلوب است محاسبهٔ حد (الف) بالا و (ب) پایین زاویهٔ بروستر برای نور فرودی بر یک کوارتز گداخته. فرض کنید حدود طول موج نور عبارت‌اند از ۴۰۰ و $۷۰۰\mathrm{nm}$.

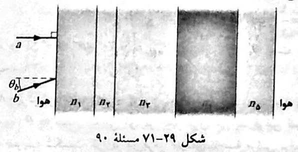
حل: از شکل ۲۹-۱۹ درمی‌یابیم که به ازای $\lambda=۴۰۰nm$، $n_{max}=۱/۴۷۰$ و به ازای $\lambda=۷۰۰nm$، $n_{max}=۱/۴۵۶$ است. (الف) و (ب) زاویه‌های بروستر مربوطه عبارتند از:

$$\theta_{B,max}=\tan^{-۱}n_{max}=\tan^{-۱}(۱/۴۷۰)=۵۵/۸^{\circ}$$

و

$$\theta_{B,min}=\tan^{-۱}n_{min}=\tan^{-۱}(۱/۴۵۶)=۵۵/۵^{\circ}$$

۹۰- در شکل ۲۹-۷۱، دو پرتو نور از هوا به درون پنج لایهٔ پلاستیک شفاف می‌تابند و پس از عبور از آنها دوباره به هوا برمی‌گردند. سطح جدایی لایه‌ها موازی و ضخامت آنها نامشخص است؛ ضریب شکست آنها عبارت‌اند از $n_{۱}=۱/۷$ ، $n_{۲}=۱/۶$ ، $n_{۳}=۱/۵$ ، $n_{۴}=۱/۴$ و $n_{۵}=۱/۶$. پرتو b با زاویهٔ $\theta_b=۲۰^{\circ}$ فرود می‌آید. در آخرین سطح جدایی، با چه زاویه‌ای نسبت به عمود (الف) پرتو a و (ب) پرتو b خارج می‌شوند؟ (راهنمایی: حل مسئله به طریق جبری می‌تواند موجب صرفه‌جویی در وقت باشد.) اگر به جای هوا در سمت چپ و سمت راست شکل شیشه‌ای با ضریب شکست ۱/۵ وجود داشته باشد، با چه زاویه‌ای (ب) پرتو a و (ت) پرتو b خارج می‌شوند؟



شکل ۲۹-۷۱ مسئلهٔ ۹۰

حل: (الف) در اشعه (a) چون زاویهٔ تابش صفر درجه است، بدون هیچ انحرافی خارج می‌گردد.

(ب)

$$n_a\sin\theta_b=n_{۱}\sin\theta_{۱}=n_{۲}\sin\theta_{۲}=n_{۳}\sin\theta_{۳}$$

$$=n_{۴}\sin\theta_{۴}=n_{۵}\sin\theta_{۵}=n_a\sin\theta_{۶}$$

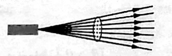
$\theta_{۶}$ زاویهٔ ورود به هوا و n_a ضریب شکست هوا است.

(پ) باریکه a بدون انحراف خارج می‌گردد.

$$\theta_{۶}=\theta_b=۲۰^{\circ}$$

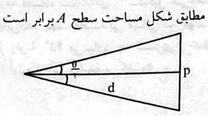
(ت) دوباره زاویهٔ خروج اشعه b همان ۲۰° بود.

۹۱- یک لیزر هلیوم- نئون، که در $۶۳۲/۸\mathrm{nm}$ تابش می‌کند دارای توان خروجی $۳/۰\mathrm{mW}$ و واگرایی (گستردگی) زاویه‌ای $\theta=۰/۱۷\mathrm{mrad}$ (شکل ۲۹-۷۲) است. (الف) شدت باریکه در فاصلهٔ $۴۰\mathrm{m}$ از لیزر چقدر است؟ (ب) توان یک چشمهٔ نقطه‌ای که همان توان را در همان فاصله ایجاد کند چقدر است؟



شکل ۲۹-۷۲ مسئلهٔ ۹۱

حل: (الف) مطابق شکل مساحت سطح A برابر است با:



$$\frac{\theta}{۲}=\frac{۰/۱۷\times ۱۰^{-۳}}{۲}=۸/۵\times ۱۰^{-۵}\ \mathrm{rad}$$

$$R=d\tan\frac{\theta}{۲}\simeq(d)\frac{\theta}{۲}$$

$$R=(۴۰)(۸/۵\times ۱۰^{-۵})=۳/۴\times ۱۰^{-۳}\ \mathrm{m}$$

$$A=\pi R^{۲}=(۳/۱۴)(۳/۴\times ۱۰^{-۳})^{۲}=۳/۶۲\times ۱۰^{-۵}\ \mathrm{m^{۲}}$$

$$I=\frac{P}{A}=\frac{(۳\times ۱۰^{-۳})}{(۳/۶۲\times ۱۰^{-۵})}=۸۲/۸۷\ \mathrm{W/m^{۲}}$$

(ب)

$$P=IA=(۸۲/۸۷)(۴\pi)(۴۰)^{۲}=۱/۶۷\times ۱۰^{۶}\ \mathrm{W}$$

۹۲- حدود ۱۵۰ سال پس از میلاد، کلادیوس بطلمیوس برای باریکهٔ نور که از هوا داخل آب می‌شود برای زاویهٔ فرود $\theta_{۱}$ و زاویهٔ شکست $\theta_{۲}$ مقدارهای اندازه‌گیری شدهٔ زیر را به دست آورد:

$\theta_{۱}$	$\theta_{۲}$	$\theta_{۱}$	$\theta_{۲}$
۱۰°	۸۰	۵۰°	۳۵°
۲۰°	۱۵°۳۰′	۶۰°	۴۰°۳۰′
۳۰°	۲۲°۳۰′	۷۰°	۴۵°۳۰′
۴۰°	۲۹°	۸۰°	۵۰°

فرض کنید این داده‌ها با قانون شکست سازگارند، با به کاربردن آنها ضریب شکست آب را به دست آورید. این داده‌ها شاید به عنوان قدیمی‌ترین اندازه‌گیری‌های فیزیکی ثبت شده قابل توجه باشند.

حل:

$$n_{۱}\sin\theta_{۱}=n_{۲}\sin\theta_{۲}$$

$$(۱)\sin ۱۰=n\sin ۸\Rightarrow n=۱/۲۸۰$$

$$(۱)\sin ۲۰=n\sin ۱۵/۵^{\circ}\Rightarrow n=۱/۲۸۰$$

$$(۱)\sin ۳۰=n\sin ۲۲/۵^{\circ}\Rightarrow n=۱/۳۰۷$$

$$(۱)\sin ۴۰=n\sin ۲۹\Rightarrow n=۱/۳۲۶$$

$$(۱)\sin ۵۰=n\sin ۳۵\Rightarrow n=۱/۳۳۶$$

$$(۱)\sin ۶۰=n\sin ۴۰/۵\Rightarrow n=۱/۳۳۳$$

$$(۱)\sin ۷۰=n\sin ۴۵/۵\Rightarrow n=۱/۳۱۷$$

$$(۱)\sin ۸۰=n\sin ۵۰\Rightarrow n=۱/۲۸۶$$

$$\overline{n}=۱/۳۰۸$$

۹۳- یک باریکهٔ نور ناقطبیدهٔ اولیه به سامانه‌ای شامل دو ورقهٔ قطبنده که یکی روی دیگری واقع است می‌تابد. اگر شدت نور گسیل شده یک سوم شدت نور فرودی باشد، زاویهٔ میان جهتهای قطبیدگی ورقه‌ها چقدر است؟

حل:

$$I_{۱}=\frac{I_{۰}}{۲}$$

$$I_{۲}=I_{۱}\cos^{۲}(\theta_{۲}-\theta_{۱})=\frac{I_{۰}}{۲}\cos^{۲}(\Delta\theta)$$

$$\frac{I_{۲}}{I_{۰}}=\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۲}\cos^{۲}\Delta\theta\Rightarrow\cos^{۲}\Delta\theta=\frac{۲}{۳}$$

$$\cos\Delta\theta=۰/۸۱۶$$

$$\Delta\theta=۳۵/۳^{\circ}$$